

SESSION 2006

MPM2006



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

QUELQUES APPLICATIONS DES MATRICES DE GRAM À LA GÉOMÉTRIE

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$ et on note $(|)$ un produit scalaire sur E et $\| \|$ la norme associée.

Si x_1, x_2, \dots, x_p sont p vecteurs de E , on appelle matrice de GRAM de x_1, x_2, \dots, x_p , notée $G(x_1, x_2, \dots, x_p)$, la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de terme général $(x_i | x_j)$ pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq p$:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} (x_1 | x_1) & (x_1 | x_2) & \dots & (x_1 | x_p) \\ (x_2 | x_1) & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (x_p | x_1) & \cdot & \dots & (x_p | x_p) \end{pmatrix}$$

on notera $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_p)$ son déterminant : $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_p) = \det G(x_1, x_2, \dots, x_p)$.

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, le noyau de A est, par définition,

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$$

Par ailleurs, on note :

pour n entier $n \geq 2$, E_n l'espace \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique à la fois considéré comme espace vectoriel euclidien et espace affine euclidien.

I. GÉNÉRALITÉS

1. Résultat préliminaire

- Que peut-on dire d'une matrice $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^t Y Y = 0$?
- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, montrer que $\text{Ker}({}^t A A) \subset \text{Ker} A$ puis en déduire que $\text{rang}({}^t A A) = \text{rang} A$.

2. On donne x_1, x_2, \dots, x_p p vecteurs de E .

Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E , et si A est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs x_1, x_2, \dots, x_p dans la base \mathcal{B} , montrer que $G(x_1, x_2, \dots, x_p) = {}^t A A$.

Quel lien existe entre le rang de la matrice $G(x_1, x_2, \dots, x_p)$ et le rang de la famille de vecteurs (x_1, x_2, \dots, x_p) ?

3. Dans cette question, $p = n$.

- Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour que la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) soit liée.
- Montrer que la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) est libre si, et seulement si, $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$.

4. Application

L'angle géométrique d'un couple (u, v) de vecteurs non nuls de E_n est le réel $\alpha \in [0, \pi]$

vérifiant : $\cos \alpha = \frac{(u | v)}{\|u\| \|v\|}$.

Si A, B et C sont trois points de E_3 situés sur la sphère de centre O et de rayon 1, si on désigne par α, β et γ l'angle géométrique des couples respectifs $(\overline{OA}, \overline{OB}), (\overline{OB}, \overline{OC})$ et $(\overline{OA}, \overline{OC})$, montrer en utilisant une matrice de GRAM que :

$$1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \geq \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma.$$

Que se passe-t-il dans le cas où les points A, B et C sont sur un même cercle ?

5. Interprétation géométrique de la matrice de GRAM

- Si a, b et y sont trois vecteurs de E tels que le vecteur a soit orthogonal à la fois au vecteur b et au vecteur y , trouver une relation entre les déterminants $\Gamma(a+b, y)$, $\Gamma(a, y)$ et $\Gamma(b, y)$.
- Si (x, y) est une famille libre de deux vecteurs de E_2 , si $F = \text{vect}\{y\}$ et si z est le projeté orthogonal du vecteur x sur F , montrer que $\Gamma(x, y) = \Gamma(x-z, y)$.

- c. En déduire que si A, B et C sont trois points non alignés de E_2 , $\frac{1}{2}\sqrt{\Gamma(\overline{AB}, \overline{AC})}$ est l'aire du triangle ABC (donc, $\sqrt{\Gamma(\overline{AB}, \overline{AC})}$ est l'aire du parallélogramme « formé par A, B et C »).
6. De la même façon on montre que si A, B, C et D sont quatre points non coplanaires de E_3 , $\sqrt{\Gamma(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})}$ est le volume du parallélépipède « formé par A, B, C et D » que l'on désignera par parallélépipède $ABCD$.
On ne demande pas de prouver ce résultat.
- a. Vérifier que ce résultat permet de retrouver la formule usuelle du volume du parallélépipède rectangle.
- b. A l'aide de ce résultat écrire un petit algorithme en français qui, avec la donnée des coordonnées des points A, B, C et D , calcule le volume du parallélépipède $ABCD$ ou affiche que les points sont coplanaires.
On pourra considérer que l'algorithme suppose connu le calcul du déterminant.
- c. Après avoir entré cet algorithme dans la calculatrice, indiquer les résultats qu'elle donne dans chacun des cas suivants :
- $A = (1, 2, 0)$, $B = (1, -1, 3)$, $C = (-1, -2, 0)$ et $D = (3, -1, 0)$.
 - $A = (1, -1, 2)$, $B = (3, 4, -7)$, $C = (0, 3, 0)$ et $D = (0, 2, 1)$.
 - $A = (8, 0, \frac{3}{2})$, $B = (0, 1, -1)$, $C = (-\frac{1}{2}, 2, 0)$ et $D = (3, 3, 0)$.

II. POINTS ÉQUIDISTANTS SUR UNE SPHÈRE EUCLIDIENNE

Dans cette partie, m est un entier naturel, $m \geq 2$, et t est un réel, $t \neq 1$.

La famille de m vecteurs distincts (x_1, x_2, \dots, x_m) de l'espace E , de dimension $n \geq 2$, est solution du problème $P(m, t)$ si :

tous les vecteurs x_1, x_2, \dots, x_m sont de norme 1

et

pour tout couple (i, j) d'entiers distincts entre 1 et m , $(x_i | x_j) = t$.

7. Résultats préliminaires

- a. Montrer que si (x_1, x_2, \dots, x_m) est solution du problème $P(m, t)$ alors, pour tout couple (i, j) d'entiers distincts entre 1 et m , $\|x_i - x_j\|$ est constant.
- b. Sans aucun calcul de déterminant, donner en le justifiant, le polynôme caractéristique de la matrice $J \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.
- c. En déduire que si (x_1, x_2, \dots, x_m) est solution du problème $P(m, t)$, alors $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_m) = (1-t)^{m-1}(1+(m-1)t)$.

8. Conditions nécessaires

- a. Montrer que, pour que (x_1, x_2, \dots, x_m) soit une famille libre de vecteurs solution du problème $P(m, t)$, il est nécessaire que $t \in \left] \frac{-1}{m-1}, 1 \right[$ et que $m \leq n$.

- b. Montrer que, pour que (x_1, x_2, \dots, x_m) soit une famille liée de vecteurs solution du problème $P(m, t)$, il est nécessaire que $t = \frac{-1}{m-1}$ et que $m \leq n+1$ (on pourra montrer qu'alors, la famille $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$ est libre).

c. Application

Existe-t-il dans E_3 cinq vecteurs distincts qui deux à deux forment un même angle obtus

θ , c'est-à-dire tel que $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$?

9. Exemple du cas $n = 2$

Déterminer pour $m \geq 3$, une famille (A_1, A_2, \dots, A_m) de points de E_2 , telle que la famille de vecteurs $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \dots, \overrightarrow{OA_m})$ soit solution du problème $P(m, t)$ en précisant le couple (m, t) . Placer ces points sur une figure.

10. Exemple du cas $n = 3$

On suppose que $n = 3$ et $t \in \left] \frac{-1}{2}, 1 \right[$.

On pose $a = \sqrt{\frac{2-2t}{3}}$ et $b = \sqrt{\frac{2t+1}{3}}$.

- a. Soit u un vecteur unitaire de \mathbb{R}^3 et H un sous espace supplémentaire orthogonal de $\text{vect}\{u\}$ dans \mathbb{R}^3 , justifier qu'il existe une famille (y_1, y_2, y_3) de vecteurs de H solution du problème $P(3, \frac{-1}{2})$.
- b. Si on pose alors pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $x_i = a y_i + b u$, montrer que (x_1, x_2, x_3) est une famille libre de vecteurs solution au problème $P(3, t)$.
- c. A quelle condition nécessaire portant sur $\alpha \in]0, \pi[$, existe-t-il trois points A_1, A_2 et A_3 de la sphère de centre O et de rayon 1 de E_3 tels que les trois angles géométriques des couples $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2})$, $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_3})$ et $(\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3})$ soient égaux à α ?

Remarque : on demande de ne pas utiliser le résultat de la question 4.

III. THÉORÈMES d'APOLLONIUS

On rappelle que si $\mathcal{B} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ est une base de E et si f est une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$, la matrice de f dans la base \mathcal{B} est la matrice symétrique S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $S = (f(a_i, a_j))$. Par ailleurs, si x et y sont deux vecteurs de E où X et Y sont les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ représentant leurs composantes dans la base \mathcal{B} , on a $f(x, y) = {}^t X S Y$.

11. Soit \langle , \rangle un autre produit scalaire sur E , on considère (a_1, a_2, \dots, a_n) et (b_1, b_2, \dots, b_n) deux bases orthonormales de E pour ce produit scalaire. On note P la matrice de passage de la base (a_1, a_2, \dots, a_n) vers la base (b_1, b_2, \dots, b_n) .

Montrer que, pour le produit scalaire $(\cdot | \cdot)$, $G(b_1, b_2, \dots, b_n) = P^{-1} G(a_1, a_2, \dots, a_n) P$
 puis justifier que $\sum_{i=1}^n (a_i | a_i) = \sum_{i=1}^n (b_i | b_i)$.

12. Dans E_2 , de repère orthonormé (O, e_1, e_2) , on considère l'ellipse C d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où a et b sont deux réels strictement positifs.

a. Justifier que l'on définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 par $\langle U, V \rangle = \frac{u \cdot v}{a^2} + \frac{u' \cdot v'}{b^2}$ si $U = (u, u')$ et $V = (v, v')$ dans la base (e_1, e_2) .

b. Deux vecteurs U et V de E_2 sont des diamètres conjugués de C si (U, V) est une base orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Donner un exemple simple de deux diamètres conjugués de C .

c. Dans cette question, on demande de faire une figure.

Soit M_0 un point de coordonnées (x_0, y_0) de C , montrer en utilisant un vecteur gradient,

que l'équation de la tangente T à la courbe C en M_0 est $\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1$. En déduire que

la droite D qui passe par O et parallèle à T a pour équation cartésienne $\langle \overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM} \rangle = 0$.

Si on note M_0' un point d'intersection de D et C , montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{OM_0}'$ sont des diamètres conjugués de C .

d. Si M et M' sont deux points de C tels que les vecteurs \overrightarrow{OM} et \overrightarrow{OM}' soient des diamètres conjugués de C , démontrer les deux théorèmes d'Apollonius suivants :

i. $OM^2 + OM'^2 = a^2 + b^2$ (précision : $OM^2 = \left(\overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{OM} \right)$).

ii. L'aire du parallélogramme « formé par O, M et M' » est constante égale à ab .

IV. RECHERCHE D'UNE ISOMÉTRIE AFFINE

13. On note $O(E_n)$ le groupe des automorphismes orthogonaux de E_n .

Soit (x_1, x_2, \dots, x_n) et (y_1, y_2, \dots, y_n) deux familles de vecteurs de E_n vérifiant

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = G(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

On veut montrer qu'il existe $u \in O(E_n)$ vérifiant : pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $u(x_i) = y_i$.

On note $p = \text{rang}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{rang}(y_1, y_2, \dots, y_n)$, et on considère que les vecteurs sont numérotés de sorte que (x_1, x_2, \dots, x_p) et (y_1, y_2, \dots, y_p) soient deux familles libres de vecteurs.

On pose alors $V = \text{vect}\{x_1, x_2, \dots, x_p\} = \text{vect}\{x_1, x_2, \dots, x_p, \dots, x_n\}$,

$$W = \text{vect}\{y_1, y_2, \dots, y_p\} = \text{vect}\{y_1, y_2, \dots, y_p, \dots, y_n\},$$

on note $(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ une base orthonormale de V^\perp

et $(e'_{p+1}, e'_{p+2}, \dots, e'_n)$ une base orthonormale de W^\perp .

Soit u un endomorphisme de E défini par :

pour $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ $u(x_i) = y_i$ et pour $i \in \{p+1, p+2, \dots, n\}$ $u(e_i) = e'_i$.

- a. Montrer que u conserve le produit scalaire.
 - b. Pour tout entier $i \in \{p+1, p+2, \dots, n\}$, montrer que $y_i - u(x_i) \in W \cap W^\perp$.
 - c. Conclure.
- 14.** On donne (A_1, A_2, \dots, A_n) et (B_1, B_2, \dots, B_n) deux familles de points de E_n vérifiant pour tout couple d'entiers (i, j) compris entre 1 et n , $\|\overline{A_i A_j}\| = \|\overline{B_i B_j}\|$ et on veut montrer qu'il existe une isométrie affine f de E_n vérifiant pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $f(A_i) = B_i$.
- a. Si on pose pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_i = \overline{A_i A_i}$ et $y_i = \overline{B_i B_i}$, montrer que, pour tout couple d'entiers (i, j) compris entre 1 et n , $(x_i \mid x_j) = (y_i \mid y_j)$.
 - b. Conclure.

Fin de l'énoncé