CONCOURS ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve d'Informatique MP

durée 3 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice est interdit

- **Indiquer en tête de copie ou de chaque exercice le langage utilisé.**

- **On utilisera la notation `t[i]` pour accéder à l'élément n° *i* d'un tableau *t*.**

- **On indicera les tableaux à partir de 1, quitte à ne jamais prendre en compte l'élément d'indice 0 dans un langage où les tableaux sont indicés à partir de 0.**

1. Le tri par sélection

Le tri (croissant) par sélection d'un tableau *t* de *n* éléments consiste à rechercher le plus grand élément, le permuter avec l'élément situé en fin de tableau, et à itérer le traitement avec un élément de moins, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un seul élément.

1.1. Écrire la fonction

```
indiceMaxi      données          t : tableau d'entiers,
                                 n : entier;
                résultat           : entier;
```

qui recherche dans un tableau *t* de *n* entiers le plus grand entier et retourne son indice. S'il y a plusieurs maxima égaux, elle retourne l'indice du premier de ceux-ci.

1.2. Écrire la fonction ITÉRATIVE

```
triSelec1       donnée-résultat  t : tableau d'entiers ;
                donnée           n :  entier;
                résultat           : sans retour
```

qui trie par sélection le tableau *t* de *n* entiers.

1.3. Écrire la fonction RÉCURSIVE

```
triSelec2       donnée-résultat  t : tableau d'entiers ;
                donnée           n :  entier;
                résultat           : sans retour
```

qui trie par sélection le tableau *t* de *n* entiers.

1.4. Donner la complexité de ce tri.

2. Tri par insertion

Le tri (croissant) par insertion d'un tableau *t* de *n* éléments consiste à rechercher itérativement la place d'insertion de l'élément n°*i* dans le sous-tableau précédent (indicé de 1 à *i*-1) supposé trié et à l'insérer à sa place. On commence à partir du deuxième élément et on termine quand tous les éléments ont été placés.

La recherche de la place d'insertion peut se faire **séquentiellement** ou **par dichotomie**.

2.1. Expliquer brièvement les deux principes de recherche (séquentielle et dichotomique) et donner leurs complexités (en moyenne et au pire).

2.2. Écrire la fonction

```
posInser1     données          t : tableau d'entiers,
                               n : entier,
                               x : entier;
              résultat           : entier;
```

qui recherche séquentiellement dans un tableau *t* trié de *n* entiers la place d'insertion de *x*.

2.3. Écrire la fonction

```
posInser2     données          t : tableau d'entiers,
                               n : entier,
                               x : entier;
              résultat           : entier;
```

qui recherche par dichotomie dans un tableau *t* trié de *n* entiers la place d'insertion de *x*.

2.4. Écrire la fonction

```
decale        donnée-résultat  t : tableau d'entiers ;
              données          i : entier,
                               j : entier;
              résultat           : sans retour
```

qui décale d'une position vers la droite tous les éléments du tableau *t* depuis l'indice *i* jusqu'à l'indice *j* (compris)

2.5. Écrire la fonction ITÉRATIVE

```
triInser      donnée-résultat  t : tableau d'entiers ;
              donnée           n :  entier ;
              résultat           : sans retour
```

qui trie par insertion le tableau *t* de *n* entiers.

3. Tri rapide (quick sort)

Le principe du quick sort est de partitionner le tableau à trier (s'il a au moins deux éléments) en trois sous-tableaux, le premier comprenant tous les éléments inférieurs ou égaux à un élément (l'élément pivot), le deuxième ne contenant qu'un seul élément (l'élément pivot) et le troisième contenant tous les éléments supérieurs ou égaux à l'élément pivot. Puis on réapplique **récursivement** le quick sort sur les premier et troisième sous-tableaux (l'élément pivot, lui, est à sa place définitive).

Soit les fonctions

```
partition     donnée-résultat     t : tableau d'entiers ;
              données             i : entier,
                                  j : entier;
              résultat              : entier
```

qui opère sur le sous-tableau *t* compris entre les indices *i* et *j*, prend *t[i]* comme élément pivot, déplace les éléments inférieurs ou égaux au pivot en début de sous-tableau, les éléments supérieurs ou égaux au pivot en fin de sous-tableau, positionne le pivot à sa place définitive et retourne la valeur de cette place

et

```
quicksort     donnée-résultat     t : tableau d'entiers ;
              données             i : entier,
                                  j : entier;
              résultat              : sans retour
```

qui trie le tableau t entre les indices i et j (compris)

Soit le tableau suivant :

t	5	1	12	3	24	8	10	2	14	7	2	9	4	17
indice	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*

3.1. Donner un contenu possible de t *après l'appel à* `partition(t,1,14)`*, et la valeur de retour de la fonction*

3.2. Avec quels paramètres doit-on appeler `quicksort` *pour continuer le tri après cette partition ?*

3.3. Écrire la fonction quicksort

3.4. *Écrire la fonction* partition

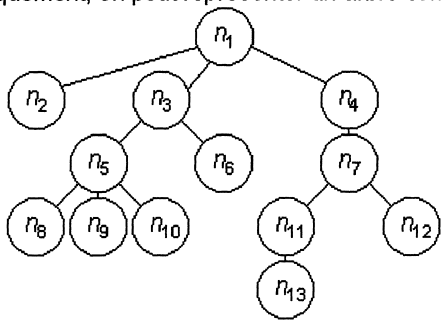
On pourra utiliser deux parcours, l'un allant du début du sous-tableau vers la fin, et l'autre allant de la fin vers le début. Le parcours *montant* sera suspendu quand un élément sera supérieur au pivot ; le parcours *descendant* sera suspendu quand un élément sera inférieur au pivot. Les éléments seront alors échangés et les parcours reprendront jusqu'à ce qu'ils se rejoignent. La place du pivot sera alors déterminée, le pivot y sera mis, et sa place retournée.

4. Le tri par tas (heap sort)

Le tri par tas consiste à interpréter le tableau comme un arbre binaire presque parfait, à le transformer en tas, puis itérativement, à permuter la racine de l'arbre avec la dernière feuille, puis, à reconstituer le tas avec un élément de moins et ce jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un élément à traiter.

Définitions

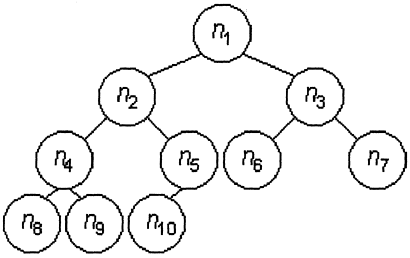
- **Arbre** :Un arbre est soit un arbre atomique (une *feuille*), soit un *nœud* (*père*) et une suite de sous-arbres (*ses fils*). Chaque nœud ou feuille de l'arbre est associé à une valeur. Graphiquement, on peut représenter un arbre comme suit :



Ici, par exemple, le nœud n_5 a pour fils n_8, n_9 et n_{10} et pour père n_3. n_1 est appelé la racine de l'arbre et les feuilles en sont n_2, n_6, n_8, n_9, n_{10}, n_{12} et n_{13}.

- **Arbre binaire (AB)** : arbre où chaque nœud est associé au maximum à deux sous-arbres

- **Arbre binaire presque complet (ABPC)** : arbre binaire dans lequel tous les niveaux de profondeur, sauf peut-être le dernier contiennent le maximum de nœuds, et les feuilles du dernier niveau sont toutes à gauche. Exemple d'arbre binaire presque complet



Un ABPC peut être représenté par un tableau (représentation tabulaire) et réciproquement, un tableau peut être interprété comme un arbre binaire presque complet.

Ici, le tableau

t	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}
indice	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*

peut être interprété comme l'ABPC de la figure.

- **Tas** : Un tas est ABPC dans lequel chaque nœud est **dominant** (valeur supérieure ou égale à celles de son ou ses fils).

4.1. Dessiner l'arbre représenté par le tableau suivant :

t	9	5	8	9	7	6	7	3	6	4
indice	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*

4.2. Écrire la fonction

```
indiceFilsG   donnée              i : entier,
              résultat              : entier
```

retourne l'indice du fils gauche (supposé existant) d'un nœud d'indice *i* dans la représentation tabulaire d'un ABPC

4.3. Écrire la fonction

```
indiceFilsD   donnée              i : entier,
              résultat              : entier
```

retourne l'indice du fils droit (supposé existant) d'un nœud d'indice *i* dans la représentation tabulaire d'un ABPC

4.4. Écrire la fonction

```
indicePere    donnée              i : entier,
              résultat              : entier
```

retourne l'indice du père (supposé existant) d'un nœud d'indice *i* dans la représentation tabulaire d'un ABPC

4.5. Écrire la fonction

```
estFeuille    données             i : entier,
                                  n : entier;
              résultat              : booléen
```

qui retourne *Vrai* si *i* est l'indice d'une feuille (nœud sans fils) dans la représentation tabulaire d'un ABPC de taille *n*, et *Faux* sinon.

4.6. Écrire la fonction

```
estPere1      données             i : entier,
                                  n : entier;
              résultat              : booléen
```

qui retourne *Vrai* si *i* est l'indice d'un nœud n'ayant qu'un seul fils dans la représentation tabulaire d'un ABPC de taille *n*, et *Faux* sinon.

4.7. Écrire la fonction

```
estPere2      données             i : entier,
                                  n : entier;
              résultat              : booléen
```

qui retourne *Vrai* si *i* est l'indice d'un nœud ayant deux fils dans la représentation tabulaire d'un ABPC de taille *n*, et *Faux* sinon.

4.8. Écrire la fonction

```
estDominant   données          t : tableau d'entiers;
                               i : entier,
                               n : entier;
              résultat           : booléen
```

qui retourne *Vrai* si *i* est l'indice d'une feuille ou d'un nœud dominant (nœud de valeur supérieure ou égale à celles de son ou ses fils) dans la représentation tabulaire *t* d'un ABPC de taille *n*, et *Faux* sinon.

4.9. Écrire la fonction

```
retablirTas   donnée-résultat  t : tableau d'entiers;
              données          i : entier,
                               n : entier;
              résultat           : sans résultat
```

qui opère sur le sous-arbre de *t* (représentation tabulaire d'un ABPC) à partir de l'indice *i* pour en faire un tas, **avec comme hypothèse que les fils de *i* (s'ils existent) sont des tas**.

Par exemple :

t	9	5	8	9	7	6	7	3	6	4
indice	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*

`retablirTas(t,2,10)` transformera l'arbre en

t	9	9	8	6	7	6	7	3	5	4
indice	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*

4.10. Écrire la fonction

```
construireTas donnée-résultat  t : tableau d'entiers;
              donnée           n : entier;
              résultat           : sans résultat
```

qui opère sur *t* (représentation tabulaire d'un ABPC) pour en faire un tas.

Par exemple :

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
indice	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*

`construireTas(t,10)` transformera l'arbre en

t	10	9	7	8	5	6	3	1	4	2
indice	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*

4.11. Écrire la fonction

```
heapSort      donnée-résultat  t : tableau d'entiers;
              donnée           n : entier;
              résultat           : sans résultat
```

qui trie par tas le tableau *t* de *n* entiers.