

CONCOURS COMMUN 2005

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Jeudi 19 mai 2005 de 14h00 à 18h00

Instructions générales:

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondante.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

PROBLÈME D'ALGÈBRE ET DE GÉOMÉTRIE

Les quatre parties **A**, **B**, **C**, **D** de ce problème sont totalement indépendantes entre elles.

Dans tout ce problème, on se place dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note \mathcal{E} l'ensemble des points de l'espace et E l'ensemble des vecteurs de l'espace. Les différentes coordonnées et équations qui apparaissent dans l'énoncé sont relatives au repère \mathcal{R} .

Si $\vec{X} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, on pourra aussi noter $\vec{X} = (x, y, z)$.

Si α, β et δ sont trois réels fixés et si \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont trois vecteurs fixés de E , on note f l'application linéaire de E dans E définie pour tout vecteur \vec{X} de E par

$$f(\vec{X}) = \alpha(\vec{X} \cdot \vec{u})\vec{v} + \beta\vec{X} + \delta\vec{X} \wedge \vec{w}$$

A - Etude de l'intersection de deux plans mobiles et d'un plan fixe

On note D' la droite passant par O dirigée par $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, D la droite d'équations $\begin{cases} y = z \\ x = 1 \end{cases}$, Q le plan d'équation $y + z = 0$ et enfin, pour tout réel m , P_m est le plan d'équation $x + my - mz = 1$.

A - 1) Donner un vecteur normal \vec{n}_m de P_m ainsi qu'un point et un vecteur directeur de D .

Vérifier que tous les plans P_m contiennent la droite D .

A - 2) Calculer $\vec{r}_m = \vec{n}_m \wedge \vec{a}$. En déduire que D' n'est pas orthogonale à P_m . On appelle alors R_m l'unique plan contenant D' et perpendiculaire à P_m . Obtenir une équation cartésienne de R_m .

A - 3) Déterminer, pour tout réel m , les coordonnées dans \mathcal{R} de I_m point d'intersection des plans P_m, Q et R_m .

A - 4) On note (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = x$ et Ω le point de Q de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0, 0)$.

Préciser la nature géométrique de (S) ainsi que les éléments géométriques qui le caractérisent.

- A - 5)** Vérifier que I_m appartient à (S) puis que I_m appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.
- A - 6)** Déterminer l'ensemble F des points M de \mathcal{E} par lesquels passe un et un seul plan P_m .
Quelle est la réunion des plans P_m lorsque m décrit \mathbb{R} ?

B - Etude d'un exemple d'application f

Dans cette partie **B**, on prend $\vec{w} = \vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = \vec{j} + \vec{k} - 5\vec{i}$, $\alpha = 3, \beta = -3$ et $\delta = 1$.

- B - 1)** Vérifier que $f(x, y, z) = (4y + 2z, d, e)$ où l'on exprimera d et e en fonction de x, y et z .
- B - 2)** Déterminer une base et la dimension du noyau de f . f est-il un automorphisme de E ?
- B - 3)** Énoncer complètement le théorème du rang. Obtenir le rang de f .
- B - 4)** Montrer, dans le cas général, que si φ est une application linéaire définie sur le \mathbb{R} -espace vectoriel G où G est engendré par les vecteurs \vec{e}_1, \vec{e}_2 et \vec{e}_3 , alors l'image de φ est le \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par les vecteurs $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)$ et $\varphi(\vec{e}_3)$.
- B - 5)** Déterminer une base de l'image de f .
- B - 6)** Montrer que $B' = (f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k}))$ est une base de E .
Obtenir ensuite la matrice A' de f dans B' .
- B - 7)** Sachant que la matrice de passage P de la base B' à la base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est l'une des deux matrices suivantes :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 0 \\ 16 & 4 & 0 \end{pmatrix}; P_2 = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 32 & 32 & -16 \end{pmatrix}$$

préciser, en argumentant votre choix, laquelle est P .

Donner le lien matriciel reliant $A = M_B(f)$ à $A' = M_{B'}(f)$.

C - Etude d'un deuxième exemple

Dans cette partie **C**, on prend $\vec{w} = \vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\alpha = -3, \beta = 5$ et $\delta = 0$.

On admet qu' alors $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice de f dans la base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On rappelle que, par convention, on note $M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

- C - 1)** Prouver, par récurrence sur n , que pour tout entier naturel n , on peut trouver deux réels (qu'on notera a_n et b_n) tels que

$$M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

On obtiendra ainsi les relations définissant a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n .

- C - 2)** En utilisant les relations précédemment trouvées, vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+2} - b_{n+1} - 20b_n = 0$.
- C - 3)** En déduire la valeur de b_n puis celle de a_n en fonction de n .

C - 4) Vérifier que M^2 est combinaison linéaire de M et de la matrice I_3 .

En déduire que M est inversible et expliciter les coefficients de la matrice M^{-1} .

D - Etude d'un troisième cas

Dans cette partie **D**, on prend $\beta = \delta = 0$. On renomme alors g l'application f de l'introduction, soit

$$\forall \vec{X} \in E, g(\vec{X}) = \alpha(\vec{X} \cdot \vec{u}) \vec{v}$$

où \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs non nuls fixés de E et où α est un réel non nul.

D - 1) Vérifier que si $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 1$, alors g est un projecteur.

Démontrer ensuite que si g est un projecteur, alors $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 1$.

D - 2) On suppose que $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 1$. On note $F_1 = \{\vec{X} \in E / \vec{u} \cdot \vec{X} = 0\}$ et $F_2 = \{\lambda \vec{v} / \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Vérifier que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E (l'écriture $\vec{x} = (\vec{x} - g(\vec{x})) + g(\vec{x})$ pourra être utile).

Sur quel espace vectoriel parallèlement à quel autre g est-elle alors la projection ?

D - 3) A l'aide des deux questions précédentes, trouver la matrice Π_B dans la base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

de la projection p sur $P = \{\vec{X} = (x, y, z) \in E / x + y + z = 0\}$ parallèlement à la droite D engendrée par $\vec{j} + \vec{k} - 5\vec{i}$.

PROBLÈME D' ANALYSE

A - Etude de la fonction f telle que $f(x) = 0$ si $x = 0$ et $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ sinon

A - 1) Obtenir l'ensemble de définition D de f .

A - 2) f est-elle dérivable en 0 ?

A - 3) Justifier que f est de classe C^1 sur $]0; 1[$.

A - 4) Dresser le tableau de variations de f .

On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(e)$.

B - Etude de la suite v telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{v_n}{\ln(v_n)}$

B - 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq e$.

B - 2) Justifier que la suite v converge et déterminer sa limite.

B - 3) Montrer que $\forall x \geq e, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.

B - 4) Énoncer l'inégalité des accroissements finis.

B - 5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$.

B - 6) Sachant que $4^5 > 1000$, déterminer un entier n_1 à partir duquel v_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

C - Etude de la fonction g telle que $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x \ln(x)}$

C - 1) On admet que, sur $D \setminus \{0\}$, $g'(x) = \frac{1+x^2}{x^2 \ln^2(x)} h(x)$ avec $h(x) = \ln(x) + \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Etudier les variations de g .

C - 2) Déterminer la limite de g en 1.

C - 3) Déterminer la position relative de la courbe représentative de g par rapport à celle de f .
Déterminer l'aire du domaine plan délimité par les courbes représentatives de f et de g ainsi que par les droites d'équation $x = 2$ et $x = e$.

D - Tracé d'une courbe paramétrée

On considère (Γ) la courbe donnée par le paramétrage $\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$ pour t décrivant $D \setminus \{0\}$.

D - 1) Déterminer les asymptotes de (Γ) ainsi que la position relative de (Γ) par rapport à celles-ci.

D - 2) Tracer la courbe (Γ) en précisant la tangente au point de paramètre $t = e$.

E - Solutions d'une équation différentielle

On note (E_1) l'équation différentielle $-x^2 z'(x) + xz(x) = z^2(x)$.

On recherche les fonctions z solutions de (E_1) sur $K =]1; +\infty[$ et qui ne s'annulent pas sur K .

E - 1) On pose $y = \frac{1}{z}$. Vérifier que y est solution sur K d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2) .

E - 2) Résoudre (E_2) sur K . On vérifiera ensuite que ces solutions sont de la forme $g_a : x \mapsto \frac{\ln(ax)}{x}$.
Vérifier que, pour $a > 1$, g_a ne s'annule pas sur K . On a donc ainsi $z(x) = \frac{x}{\ln(ax)}$.

E - 3) Pour $a > 0$, on note (C_a) la courbe représentative de la fonction $f_a : x \mapsto \frac{x}{\ln(ax)}$.

Montrer que (C_a) est l'image de (C_1) par une homothétie de centre 0 dont on précisera le rapport.

F - Etude d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale

On pose $H(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

F - 1) Déterminer l'ensemble de définition J de H .

F - 2) Etudier la limite de H en 0.

F - 3) Justifier qu'il existe un réel a dans $]0; 1]$ tel que

$$\forall x \in [a; 1[, \frac{3}{2}(x-1) \leq \ln(x) \leq \frac{1}{2}(x-1)$$

En déduire la limite de H à gauche en 1.

FIN DU SUJET