SESSION 2005 **PSIM104**

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

****

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Notation et Objectifs :

On note :

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des nombres entiers naturels,
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels,
- $\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes,
- $\mathcal{C}^0$: le $\mathbb{R}$ – espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
- $\mathcal{C}^0_1$: le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0$ des fonctions f 1-périodique (c'est-à-dire telles que $f(x+1) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Dans tout ce problème, on désigne par θ l'application de $\mathcal{C}^0$ dans $\mathcal{C}^0$, définie par :
pour tout $f \in \mathcal{C}^0$, $\theta(f) = F$ où F est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x, associe $\int_x^{x+1} f(t)dt$.

On admet que θ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0$.

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés de la fonction F et de l'endomorphisme θ.

PARTIE I

Quelques propriétés de $F=\theta(f)$

I.1/ Exemples.

I.1.1/ Expliciter $F(x)$, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=1$.

I.1.2/ Expliciter $F(x)$, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=t^k$ (où k est fixé dans $\mathbb{N}^*$).

I.2/ Variation de $F=\theta(f)$.

On désigne maintenant par f une fonction arbitraire de $\mathcal{C}^0$.

I.2.1/ Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Expliciter $F'(x)$ en fonction de f et de x.

I.2.2/ Montrer que si la fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle $J_{x_0}=[x_0,+\infty[$, alors la fonction F est croissante (respectivement décroissante) sur J_{x_0}.

I.2.3/ Montrer que la fonction $F=\theta(f)$ est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f appartient à $\mathcal{C}^0_1$.

I.2.4/ Expliciter $F(x)$, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=|\sin(\pi t)|$.

On suppose de nouveau que f désigne une fonction arbitraire de $\mathcal{C}^0$.

I.2.5/ On suppose que la fonction f admet une limite finie L_1 en $+\infty$.
Montrer que la fonction F admet une limite L_2 (que l'on explicitera) en $+\infty$; on pourra étudier d'abord le cas où $L_1=0$.

I.3/ Propriétés du graphe de F.

Soient $f\in\mathcal{C}^0$ et $F=\theta(f)$.

On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(u)=F\left(u-\frac{1}{2}\right)=\int_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} f(t)dt$.

I.3.1/ Comparer $\psi(-u)$ et $\psi(u)$, si la fonction f est impaire (respectivement paire).

I.3.2/ Quelle propriété géométrique de la représentation graphique de la fonction F peut-on déduire des résultats obtenus en **I.3.1,** si la fonction f est impaire (respectivement paire) ?

I.4/ Étude d'un exemple.

Soit $f(t)=\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-kt^2}}{k^2+1}$, pour t réel.

I.4.1/ Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

I.4.2/ La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

I.4.3/ La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, laquelle ?

I.4.4/ Indiquer l'allure de la représentation graphique de la fonction f (on ne cherchera pas à préciser $f(0)$).

I.4.5/ La fonction f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

I.4.6/ Soit $F=\theta(f)$.

I.4.6.1/ Indiquer l'allure de la représentation graphique de la fonction F.

I.4.6.2/ La fonction F est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?
(on pourra comparer $F(x)$ et $f(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}_+$).

PARTIE II

L'endomorphisme θ

II.1/ L'endomorphisme θ est-il surjectif ?

II.2/ Sur le noyau de θ.

On note désormais $Ker\theta$ le noyau de l'endomorphisme θ.

II.2.1/ Montrer que $f\in Ker\theta \Leftrightarrow [\ f\in\mathcal{C}_1^0$ et $\int_0^1 f(t)dt=0\ ]$.

II.2.2/ Soit $(f,g)\in\left(\mathcal{C}_1^0\right)^2$. On note $\langle f\mid g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

On admettra, sans justification, que $\langle .|.\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}_1^0$.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On note c_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $c_k(t)=\cos(2\pi kt)$.

II.2.2.1/ Vérifier que c_k appartient à $\mathscr{C}_1^0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et calculer $\langle c_j \mid c_k \rangle$ pour $(j,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

II.2.2.2/ $Ker\theta$ est-il de dimension finie ?

II.2.3/ Soit $f \in \mathscr{C}_1^0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note : $\varphi_n(x) = \int_n^x f(t)dt$ pour $x \in [n, n+1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $W_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt$.

II.2.3.1/ Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $W_n = \frac{\varphi_0(1)}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2} dt$.

II.2.3.2/ Si on suppose que f appartient à $Ker\theta$, quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} W_n$?

II.2.3.3/ Si on suppose que f n'appartient pas à $Ker\theta$, quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} W_n$?

II.3/ Sur le spectre de θ.

On note $Sp(\theta)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de l'endomorphisme θ.

Si a est un nombre réel fixé, on note h_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(t) = e^{at}$.

II.3.1/ Montrer que chaque h_a est un vecteur propre de l'endomorphisme θ.

II.3.2/ Étudier les variations de la fonction $u \mapsto \frac{e^u - 1}{u}$ pour $u \in \mathbb{R}^*$.

II.3.3/ Expliciter l'ensemble $[Sp(\theta)] \cap \mathbb{R}_+$.

PARTIE III

Une suite de fonctions propres de l'endomorphisme θ

Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme θ.

On note E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ qui est fixée dans toute cette partie.

On suppose $\lambda > 0$.

III.1/ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note I_k l'intervalle $\left]2k\pi,(2k+1)\pi\right[$.

On pose, pour tout t de l'intervalle I_k : $g(t) = t\left(\dfrac{\cos t}{\sin t}\right) + \ln\left(\dfrac{\sin t}{\lambda t}\right)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

III.1.1/ Soit ρ la fonction définie sur I_k, par : $\rho(t) = t\sin(2t) - t^2 - \sin^2 t$.
Étudier la fonction ρ sur I_k et préciser son signe.

III.1.2/ Montrer que g définit une bijection de I_k sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à préciser.

On se propose de montrer l'existence, dans E_λ, d'une suite (non triviale) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions propres.

III.2/ Soit $\gamma = a + ib$, où $(a,b) \in \mathbb{R} \times \left]0,+\infty\right[$.

III.2.1/ Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\int_x^{x+1} e^{\gamma t}\,dt$.

III.2.2/ À quelle condition nécessaire et suffisante la fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(t) = e^{at}\cos(bt)$ est-elle un vecteur propre de l'endomorphisme θ associé à la valeur propre λ ?

III.3/ En déduire une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions propres de l'endomorphisme θ.

Fin de l'énoncé