SESSION 2005 MPM2007

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices ***sont interdites***.

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RACINES CARRÉES DE MATRICES

Notations

Dans ce sujet, n est un entier naturel non nul et on note :
$M_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$ - algèbre des matrices carrées réelles de taille n.
$M_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne.
$GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$.
I_n la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$.
Id l'application identité de $\mathbb{R}^n$.
Pour une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ est sa matrice transposée.
$S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$.
$S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices A de $S_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$.

Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des réels, on note $\mathrm{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans cet ordre.

Si p est un entier naturel non nul, on notera $\| \ \|_\infty$ la norme infinie sur $\mathbb{R}^p$:
si $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$.
Si $a \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$, on note $B_\infty(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r pour la norme $\| \ \|_\infty$.

Objectifs

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, on dit qu'une matrice R de $M_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A si $R^2 = A$.

On note $\text{Rac}(A)$ l'ensemble des racines carrées de A, c'est-à-dire

$$\text{Rac}(A) = \left\{R \in M_n(\mathbb{R}), \quad R^2 = A\right\}.$$

Le problème propose de déterminer les racines carrées de A dans différents exemples, (on pourra constater qu'une matrice peut admettre parfois une infinité de racines) et d'étudier quelques propriétés topologiques de $\text{Rac}(A)$.

Les trois parties du problème sont **indépendantes.**
Les trois premiers exemples de la partie I sont tous **indépendants**.

I – DÉTERMINATION DE Rac(A) DANS QUELQUES EXEMPLES

Exemple 1 : Cas où A possède n valeurs propres distinctes
On suppose que la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$.

1. Justifier l'existence d'une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, puis montrer que R est une racine carrée de A, si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.

2. Racines carrées de D
Soit S une racine carrée de D.
 a. Montrer que $DS = SD$.
 b. En déduire que la matrice S est diagonale.
 c. On note alors $S = \text{diag}(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Que vaut s_i^2 lorsque $i \in \{1, \ldots, n\}$?
 d. Que peut-on dire de $\text{Rac}(A)$ si A admet une valeur propre strictement négative ?
 e. Si on suppose que toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles, déterminer les racines carrées de la matrice D. On pourra poser $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.

3. Écrire toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P. Combien de racines carrées A admet-elle ? (On discutera selon le signe des valeurs propres de A).

4. Application :

Écrire les racines carrées de $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ à l'aide de la matrice P que l'on déterminera.

Exemple 2 : Cas où A est la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$

Dans cet exemple, on cherche à déterminer les racines carrées de la matrice nulle.
Soit $R \in M_n(\mathbb{R})$, une racine carrée de la matrice nulle.

5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont R est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note r le rang de f.

a. Comparer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ puis montrer que $r \leq \frac{n}{2}$.

b. On suppose f non nul, donc $r \geq 1$. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\operatorname{Im} f$ que l'on complète avec $(e_{r+1}, \ldots, e_{n-r})$ pour former une base de $\operatorname{Ker} f$. Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note u_i le vecteur tel que $f(u_i) = e_i$.

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{n-r}, u_1, \ldots, u_r)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ puis écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On notera M_r cette matrice.

6. **a.** Déterminer les racines carrées dans $M_n(\mathbb{R})$ de la matrice nulle.

b. Application : déterminer dans $M_4(\mathbb{R})$, les racines carrées de la matrice nulle.

Exemple 3 : Cas où $A = I_n$

7. Soit R une racine carrée de l'unité I_n.

a. Vérifier que R est une matrice inversible.

b. Montrer que R est semblable à une matrice diagonale que l'on décrira.

8. Déterminer $\operatorname{Rac}(I_n)$. On pourra poser $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Exemple 4 : Cas où A est une matrice symétrique réelle

Dans cet exemple, toutes les matrices que l'on considérera appartiennent à $M_n(\mathbb{R})$.

9. Une matrice symétrique admet-elle nécessairement une racine carrée ?

10. Montrer qu'une matrice symétrique positive admet au moins une racine carrée qui est elle même symétrique et positive.

Remarque : On peut montrer l'unicité de cette racine carrée dans $S_n^+(\mathbb{R})$ mais ce ne sera pas utile pour la suite du problème.

II – ÉTUDE TOPOLOGIQUE DE Rac(A)

Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ qui a pour coefficients $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on définit une norme en posant $N(A) = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de cette norme N.

11. Fermeture de $\mathrm{Rac}(A)$

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Rac}(A)$ est une partie fermée de $M_n(\mathbb{R})$.

12. Étude du caractère borné de $\mathrm{Rac}(I_n)$

a. Un exemple instructif

Pour tout entier naturel q, on pose $S_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $S_q^{\ 2}$. $\mathrm{Rac}(I_2)$ est-elle une partie bornée de $M_2(\mathbb{R})$?

b. $\mathrm{Rac}(I_n)$ est-elle une partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 3$?

c. Application : pour cette question, $n \geq 2$.

Montrer qu'il n'existe pas de norme $\| \ \|$ « surmultiplicative » sur $GL_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire vérifiant pour tous A et B dans $GL_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \geq \|A\|\|B\|$.

III – Zéros de fonctions polynomiales. Application à la détermination de l'intérieur de Rac(A)

Soit p un entier naturel non nul. On munit $\mathbb{R}^p$ de la norme infinie $\| \ \|_\infty$.

On note Γ_p l'ensemble des **fonctions polynomiales** sur $\mathbb{R}^p$, c'est-à-dire :

si $P \in \Gamma_p$, il existe N un entier naturel et une famille de réels $\left\{a_{i_1,\ldots,i_p},\ 1 \leq i_1,\ldots,i_p \leq N\right\}$ tels que

$$\forall \left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) \in I_1 \times \ldots \times I_p, \quad P\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) = \sum_{1 \leq i_1,\ldots,i_p \leq N} a_{i_1,\ldots,i_p} x_1^{i_1} \ldots x_p^{i_p} .$$

Par exemple si $p = 3$, $P(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 3x_1x_2x_3 + 4x_2^5$ est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^3$.

Si $p = 1$, Γ_1 est l'ensemble des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$.

Enfin, si $P \in \Gamma_p$, on pose $Z(P) = \left\{\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) \in \mathbb{R}^p,\ P\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) = 0\right\}$ ($Z(P)$ est **l'ensemble des zéros de la fonction polynomiale *P***).

L'objectif de cette partie est d'étudier l'intérieur de $Z(P)$, afin de déterminer l'intérieur de $\mathrm{Rac}(A)$.

On rappelle que si Ω est une partie de $\mathbb{R}^p$, un vecteur a de $\mathbb{R}^p$ est un point intérieur à Ω s'il existe un nombre réel r strictement positif tel que $B_\infty(a, r) \subset \Omega$ et que l'intérieur d'une partie est l'ensemble de ses points intérieurs.

13. Questions préliminaires :

a. Soit $a = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$. Montrer que $B_\infty(a, r)$ peut s'écrire comme produit de p intervalles.

b. Soient F et G deux parties de $\mathbb{R}^p$. On suppose que F et G sont d'intérieur vide, montrer que $F \cap G$ est encore d'intérieur vide.

14. Exemples d'ensemble des zéros de fonctions polynomiales

a. Dans cette question $p = 1$. Soit P une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$. Dans quel cas $Z(P)$ est-il infini ? Justifier votre réponse.

b. Dans cette question $p = 2$. On considère $P(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 - 1$ et $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$. Représenter graphiquement dans le plan $\mathbb{R}^2$ les ensembles $Z(P)$ et $Z(Q)$.

$Z(P)$ et $Z(Q)$ sont-ils infinis ?

15. Intérieur de l'ensemble des zéros d'une fonction polynomiale

Soit $P \in \Gamma_p$.

a. Soient $I_1, I_2, \ldots, I_p$ des parties infinies de $\mathbb{R}$. Montrer par récurrence que si la fonction polynomiale P s'annule sur $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_p$, alors P est la fonction nulle.

b. En déduire que si P s'annule sur une partie d'intérieur non vide, P est la fonction nulle.

c. Si l'on suppose que P n'est pas la fonction nulle, que vaut l'intérieur de $Z(P)$?

16. Application à l'étude de l'intérieur de Rac(A)

Dans cette question, on confondra les espaces vectoriels $M_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$. Par exemple, on prendra la liberté d'écrire que pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, $M = (m_{i,j})_{1 \le i, j \le n} \in \mathbb{R}^{n^2}$, sans se soucier de l'ordre des termes.

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

a. Écrire $\mathrm{Rac}(A)$ sous forme d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n^2}$ puis montrer qu'il existe des éléments $P_1, P_2, \ldots, P_{n^2}$ de Γ_{n^2} tels que $\mathrm{Rac}(A) = \bigcap_{l=1}^{n^2} Z(P_l)$.

b. Déterminer l'intérieur de $\mathrm{Rac}(A)$.

Fin de l'énoncé