CONCOURS COMMUN 2004

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Mercredi 19 mai 2004 de 08h00 à 12h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondante.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

Barème indicatif : 10 points pour chaque problème

Premier problème

I. Résolution d'équations différentielles

1. Résoudre l'équation différentielle : $z' + z \operatorname{th} t = 0$, où z est une fonction de la variable réelle t à valeurs réelles.

Trouver la solution z_1 de cette équation telle que $z_1(0) = 1$.

2. Résoudre l'équation différentielle : $z' + z \operatorname{th} t = t \operatorname{th} t$.

Trouver la solution z_2 de cette équation telle que $z_2(0) = 0$.

II. Etude d'un arc paramétré

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère la courbe (Γ) représentée

$$\text{paramétriquement par : } \begin{cases} x(t) = t - \operatorname{th} t \\ y(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t} \end{cases}$$

3. Démontrer que (Γ) admet un axe de symétrie.
4. Etudier les branches infinies de (Γ) .
5. Etudier les variations de x et y ; faire un tableau.
6. Préciser la nature du point A d'abscisse 0, ainsi que la tangente en ce point.
7.
 - a) Calculer $\operatorname{ch} t$ et $\operatorname{th} t$ lorsque $\operatorname{sh} t = 1$. Calculer la valeur de t correspondante (on exprimera le résultat sous forme d'un logarithme népérien).
 - b) Déterminer le point B de (Γ) où la tangente a pour coefficient directeur -1 ; déterminer une équation cartésienne de la tangente en B à (Γ) .
8. Donner l'allure de la courbe (Γ) .
9.
 - a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (Γ) au point M de paramètre t .
 - b) Cette tangente recoupe l'axe des abscisses en un point N . Calculer la distance MN .

III. Etude d'intégrales et de suites

Soient un réel x et k un entier strictement positif. On pose $I_k(x) = \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}$.

10. Calculer $I_1(x)$ (on pourra faire le changement de variable $u = e^t$).
11. Calculer $I_2(x)$.
12.
 - a) En intégrant par parties, trouver une relation entre I_{k+2} et I_k (on pourra remarquer que $\frac{1}{\operatorname{ch}^k t} = \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch}^{k+1} t}$).
 - b) En déduire I_3 et I_4 .
13. Démontrer que la fonction $I_k : x \mapsto I_k(x)$ est :
 - a) impaire.
 - b) continue sur $\mathbb{R}$.
 - c) de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
14. Calculer I_k', I_k'' et I_k''' .
15. Donner le développement limité de I_k à l'ordre 3 au voisinage de 0.
16. Démontrer que I_k est monotone sur $\mathbb{R}$.

17. On se propose, pour k fixé, d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = I_k(n).$$

a) Démontrer que cette suite est monotone.

b) Démontrer que, pour tout réel t , $\frac{1}{\operatorname{ch} t} \leq 2e^{-t}$; en déduire que la suite converge.

18. On pose, sous réserve d'existence, $J_k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}$, notée $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t}$.

a) Démontrer l'existence de J_k .

b) Calculer J_1 et J_2 .

c) Calculer J_k .

Deuxième problème

On désigne par E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, où a, b, c

sont des nombres réels.

I. Etude de structures

1.

a) Démontrer que E , muni de l'addition des matrices et de leur produit par un scalaire réel, est un espace vectoriel réel.

b) Trouver une base et la dimension de E .

2.

a) Démontrer que E est stable pour la multiplication des matrices.

b) En déduire que E , muni de l'addition et de la multiplication des matrices, est un anneau.

c) Cet anneau est-il commutatif ?

3. On désigne par G l'ensemble des matrices de E telles que $a > 0$ et $b > 0$.

Démontrer que G est un groupe multiplicatif.

II. Puissances d'une matrice et suites

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in E.$$

4.

a) On suppose $a \neq b$. Démontrer que $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad A^p = \begin{pmatrix} a^p & c \frac{a^p - b^p}{a - b} \\ 0 & b^p \end{pmatrix}$.

b) On suppose que $a = b$. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}^*$; on exprimera les coefficients en fonction de a et c .

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} A^p = \begin{pmatrix} \alpha_n & \gamma_n \\ 0 & \beta_n \end{pmatrix}$, en convenant que

$$A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et, pour tout } x \text{ réel, } \varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

- a) Rappeler l'inégalité de Taylor-Lagrange avec ses hypothèses.
- b) Démontrer que, pour x fixé, la suite de terme général $\varphi_n(x)$ converge et que sa limite est e^x .
- c) On suppose $a \neq b$.
Calculer α_n, β_n et γ_n en fonction de $a, b, c, \varphi_n(a)$ et $\varphi_n(b)$.
Démontrer que les suites $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n$ et $(\gamma_n)_n$ ont des limites respectives α, β, γ que l'on calculera.
- d) On suppose $a = b$.
Calculer α_n, β_n et γ_n en fonction de $a, c, \varphi_{n-1}(a)$ et $\varphi_n(a)$.
Démontrer que les suites $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n$ et $(\gamma_n)_n$ ont des limites respectives α, β, γ que l'on calculera.

6.

Pour tout $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in E$, on pose $A' = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, où α, β et γ ont été définis à la

question 5, et on note f l'application de E dans E définie par $f(A) = A'$.

- a) L'application f est-elle linéaire ?
- b) L'application f est-elle injective ?
- c) L'application f est-elle surjective ?
- d) Déterminer l'image de E par f .
7. On suppose maintenant que $0 < a < \ln 2$ et $0 < b < \ln 2$.
On pose, pour $A \in E$, $\sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{p-1}}{p} (f(A) - I)^p = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$ et $\psi_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.
- a) Calculer a_n, b_n et c_n lorsque $a \neq b$, puis lorsque $a = b$ (on pourra utiliser les résultats de la question 4).
- b) Démontrer que si $0 < x < 1$, la suite de terme général $\psi_n(x)$, x fixé, converge vers $\ln(1+x)$.
- c) Dans chacun des deux cas précédents, démontrer que les suites $(a_n)_n, (b_n)_n$ et $(c_n)_n$ ont respectivement pour limites a, b et c .

FIN DU SUJET