ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE ANNEE 2004

# CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES PILOTE DE LIGNE

## EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 2 Heures
Coefficient : 1

Le sujet comprend :

- 1 page de garde,
- 2 pages (recto-verso) d'instructions pour remplir le QCM,
- 12 pages de texte, numérotées de 1 à 12.

**CALCULATRICE AUTORISEE**

# ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

## *A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT*

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

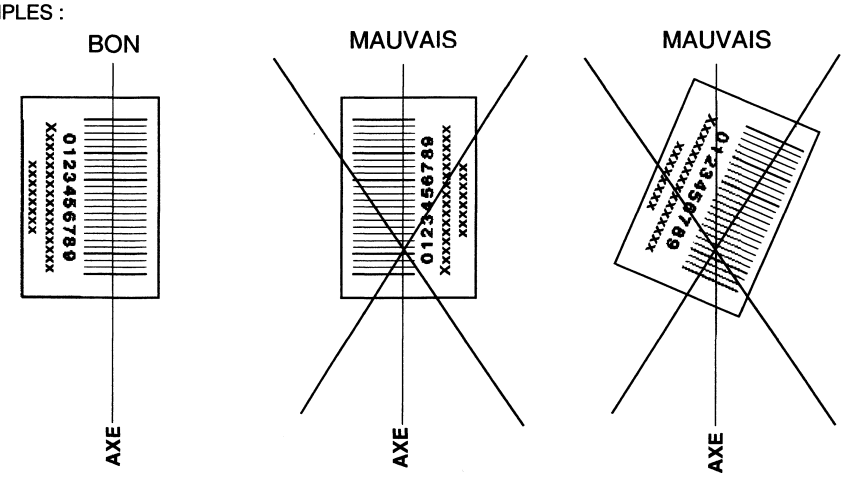
### ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire épreuve de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

### POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :




2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

5) Cette épreuve comporte 32 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet.
**Chaque candidat devra choisir au plus 25 questions parmi les 32 proposées.**

Il est inutile de répondre à plus de 25 questions : la machine à lecture optique lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'elle aura détecté des réponses à 25 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

**Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.**

6) A chaque question numérotée entre 1 et 32, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 33 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.
Pour chaque ligne numérotée de 1 à 32, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

► soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
*la ligne correspondante doit rester vierge.*

► soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse,
*vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.*

► soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,
*vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.*

► soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne,
*vous devez alors noircir la case E.*

**En cas de réponse fausse, aucune pénalité ne sera appliquée.**

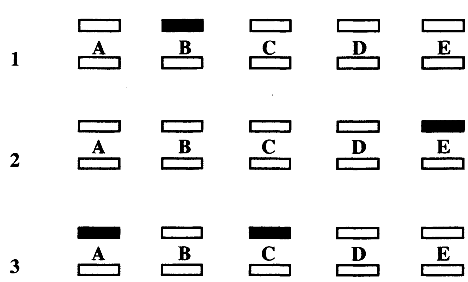
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit (-1) (-3) vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

**Vous marquerez sur la feuille réponse :**



## Questions liées : 1 à 18 ; 19 à 22 ; 23 à 29 ; 30 à 32

## - PARTIE I -

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n$ par :

$$f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$

$$x \to f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n \ln x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k_n & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

où $k_n$ est un réel fixé et ln désigne la fonction logarithme népérien. On notera $C_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthonormé. $n$ désignera un entier naturel dans cette partie.

**Question 1 :**

Le développement limité de la fonction $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 s'écrit ; $\varepsilon$ désignant une fonction telle que $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

a) $1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$

b) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$

c) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$

d) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$

**Question 2 :**

Le développement limité de la fonction $\frac{1}{2+u}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 s'écrit ; $\varepsilon$ désignant toujours une fonction telle que $\lim_{u \to 0} \varepsilon(u) = 0$

a) $1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} + u^2\varepsilon(u)$

b) $\frac{1}{2} + \frac{u}{4} + \frac{u^2}{8} + u^2\varepsilon(u)$

c) $-\frac{u}{4}+\frac{u^2}{8}+u^2\varepsilon(u)$ d) $\frac{1}{2}-\frac{u}{4}+u^2\varepsilon(u)$

**Question 3 :**

Le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $f_o$ au voisinage de 1 est alors ; $\varepsilon_0$ étant une fonction *vérifiant* $\lim_{x \to 1} \varepsilon_0(x) = 0$

a) $1-\frac{x-1}{2}+\frac{5}{12}(x-1)^2+(x-1)^2\varepsilon_0(x)$

b) $\frac{1}{2}-\frac{x-1}{2}+\frac{5}{12}(x-1)^2+(x-1)^2\varepsilon_0(x)$

c) $\frac{1}{2}-\frac{2x-1}{4}+\frac{10x^2-9x+3}{24}+x^2\varepsilon_0(x)$

d) $\frac{1}{2}-\frac{x}{2}+\frac{5}{12}x^2+x^2\varepsilon_0(x)$

**Question 4 :**

Pour tout entier $n$ strictement positif on a :

a) $f_n(x) = f_o(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ b) $f_n(x) = x^n f_o(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

et le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x^n$ au voisinage de 1 s'écrit ; $\varepsilon$ désignant une fonction telle que $\lim_{x \to 1} \varepsilon(x) = 0$

c) $1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)$

d) $1+n(x-1)+\frac{n(n-1)}{2}(x-1)^2+(x-1)^2\varepsilon(x)$

**Question 5 :**

Pour $n \in \mathbb{N}$, le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de la fonction $f_n$ est alors ; avec $\lim_{x \to 1} \varepsilon_n(x) = 0$

a) $\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2}(x-1)+\frac{3n^2-9n+5}{12}(x-1)^2+(x-1)^2\varepsilon_n(x)$

b) $1+\frac{n-1}{2}(x-1)+\frac{3n^2-9n+5}{12}(x-1)^2+(x-1)^2\varepsilon_n(x)$

c) $\frac{1}{2}+\frac{n-1}{2}(x-1)+\frac{3n^2+9n+5}{12}(x-1)^2+(x-1)^2\varepsilon_n(x)$

d) $\frac{1}{2}+\frac{n-1}{2}x+\frac{3n^2-9n+5}{12}x^2+x^2\varepsilon_n(x)$

**Question 6 :**

Pour que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n$ soit continue sur $\mathbb{R}_+^*$ il faut poser :

a) $k_n = 1$ b) $k_n = \frac{n}{2}$ c) $k_n = \frac{1}{2}$ d) $k_n = -\frac{1}{2}$

On suppose dorénavant que $k_n$ prend une valeur rendant $f_n$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$, pour $n$ entier naturel fixé.

**Question 7 :**

Pour tout entier $n$, la fonction $f_n$

a) n'est pas dérivable en 1

b) est dérivable en 1 car toute fonction continue en un point $x_0$ est dérivable en $x_0$

c) est dérivable en 1 puisque $f_n$ admet un développement limité d'ordre 1 en 1

d) est dérivable en 1 et a pour dérivée $f'_n(1) = \frac{n-1}{2}$, car toute fonction admettant un développement limité d'ordre $n$ en un point $x_0$ a une dérivée d'ordre $n$ en $x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

**Question 8 :**

L'équation de la tangente à $C_n$ au point de coordonnées $(1, k_n)$ s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y = h_n(x)$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$

a) $h_n(x) = -\frac{n-1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}$ b) $h_n(x) = \frac{n-1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}$

c) $h_n(x) = \frac{n-1}{2}x - \frac{n}{2} + 1$ d) $h_n(x) = \frac{n-1}{2}x + \frac{1}{2}$

**Question 9 :**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n - h_n$ est au voisinage de 1 du signe de $Q(n)$ où $Q$ est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $Q(x) = 3x^2 - 9x + 5$ b) $Q(x) = 3x^2 + 9x + 5$

c) $Q(x) = -3x^2 + 9x - 5$ d) $Q(x) = \frac{5}{12}$

**Question 10 :**

La fonction polynôme $Q$

a) n'admet pas de racines réelles

b) admet nécessairement des racines réelles puisqu'elle est à coéfficients réels

c) admet 2 racines réelles positives $x_1 = \frac{9-\sqrt{21}}{6}$ et $x_2 = \frac{9+\sqrt{21}}{6}$

d) admet 2 racines réelles négatives $x_1 = \frac{-9+\sqrt{21}}{6}$ et $x_2 = \frac{-9-\sqrt{21}}{6}$

**Question 11**

Au voisinage du point d'abscisse 1, la courbe $C_n$ reste :

a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, au dessus de sa tangente car $Q(n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) pour tout $n \in \mathbb{N}$ au-dessous de sa tangente car $Q(n) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) pour tout entier $n \geq 2$ au dessus de sa tangente et au dessous pour $n \leq 1$

d) pour tout $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ au dessus de sa tangente et au-dessous pour $n \in \{1, 2\}$

**Question 12 :**

On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ :

a) $f'_o(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x^2 \ln x}{x(x^2-1)^2}$ b) $f'_o(x) = \frac{1}{2x^2}$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) $f'_n(x) = x^{n-2}(n\ln x + 1)$

d) $f'_n(x) = \dfrac{x^{n+1}(1+(n-2)\ln x) - x^{n-1}(1+n\ln x)}{(x^2-1)^2}$

**Question 13 :**

La fonction $f_n$ :

a) est prolongeable par continuité en 0 par 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$

b) est prolongeable par continuité en 0 uniquement pour $n$ entier strictement positif

c) n'est prolongeable par continuité en 0 pour aucune valeur de l'entier $n$

d) est prolongeable par continuité en 0 uniquement pour $n \geq 2$

**Question 14 :**

La fonction $t_n(x) = \dfrac{f_n(x) - f_n(o)}{x}$, lorsqu'elle est définie, a pour limite à droite en O :

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} t_n(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} t_1(x) = +\infty$

et la courbe $C_n$ admet

c) une demi-tangente horizontale en (0,0) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

d) une demi-tangente horizontale en (0,0) pour $n \geq 2$ et une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0 pour $n \in \{0, 1\}$

On considère les fonctions $\varphi_0$, $\varphi_1$ et $\varphi_2$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi_0(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2\ln x$$

$$\varphi_1(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} - \ln x$$

$$\varphi_2(x) = x^2 - 1 - 2\ln x$$

**Question 15 :**

La fonction $\varphi_o$

a) a pour dérivée la fonction $\varphi'_0(x) = -\frac{1}{x}\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

b) a pour dérivée la fonction $\varphi'_0(x) = \frac{2(x^2-1)}{x^3}\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

c) atteint son maximum au point $x = 1$

d) atteint son minimum au point $x = 1$

**Question 16 :**

La fonction $f_o$

a) est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ mais n'est pas strictement décroissante

b) est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ car $f'_0(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}\varphi_o(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

et $f'_0(1) = -\frac{1}{2}$

c) est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

et la courbe $C_o$ admet

d) les droites $x = 0$ et $y = 0$ pour asymptotes car $\lim\limits_{x \to 0} f_o(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_o(x) = +\infty$

**Question 17 :**

On a :

a) $\varphi'_1(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^2}\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi_1(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi_2(x) = +\infty$

d) $\varphi_2(x) \leq 0\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

**Question 18 :**

La fonction $f_1$ prolongée à $\mathbb{R}_+^*$, si cela est possible,

a) est décroissante sur $[0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$

b) est positive sur $\mathbb{R}_+$ car croissante sur $\mathbb{R}_+$ et nulle en 0

et la droite $oy$ est

c) direction asymptotique de la courbe $C_2$

d) asymptote à la courbe $C_1$

# - PARTIE II -

$\mathbb{R}^3$ est rapporté à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$ ; $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. On considère $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui a tout triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe le triplet $((b+c)x + (c-a)y + (b-a)z,$ $(c-b)x + (a+c)y + (a-b)z,\ (b-c)x + (a-c)y + (a+b)z)$ où $a, b, c$ sont des réels distincts 2 à 2.

**Question 19 :**

La matrice $A$ de $f$ par rapport à la base $B$ s'écrit :

a) $A = \begin{pmatrix} (b+c) & (c-b) & (b-c) \\ (c-a) & (a+c) & (a-c) \\ (b-a) & (a-b) & (a+b) \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} (b+c) & (c-a) & (b-a) \\ (c-b) & (a+c) & (a-b) \\ (b-c) & (a-c) & (a+b) \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} (2b+2c-2a) & 0 & 0 \\ 0 & (2a+2c-2b) & 0 \\ 0 & 0 & (2a+2b-2c) \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} (b-a) & (c-a) & (b+c) \\ (a-b) & (a+c) & (c-b) \\ (a+b) & (a-c) & (b-c) \end{pmatrix}$

**Question 20 :**

Pour tout $\lambda$ réel la matrice $A-\lambda I$ a pour déterminant $\Delta$

a) $\Delta = (2c-\lambda)\begin{pmatrix} 1 & (c-b) & (b-c) \\ 0 & (a+b-\lambda) & (a-b) \\ 0 & (a-b) & (a+b-\lambda) \end{pmatrix}$

b) $\Delta = (2c-\lambda)\begin{pmatrix} 0 & (a+b-\lambda) & (a-b) \\ 1 & (a+c-\lambda) & (a-c) \\ 0 & (a-b) & (a+b-\lambda) \end{pmatrix}$

c) $\Delta = (2a-\lambda)(2c-\lambda)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (c-b) & (2b-\lambda) & (a-b) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\Delta = \lambda^3-\lambda^2(2a+2b+2c)+\lambda(4ab+4ac+4bc)-8abc$

**Question 21 :**

La matrice $A$

a) est égale à sa transposée pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

b) est inversible pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

c) n'est pas inversible car son déterminant est nul $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

d) est inversible si et seulement si $a$ et $b$ sont non nuls

**Question 22 :**

Le polynôme $P(\lambda) = det(A-\lambda I)$, pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

a) est de degré 2

b) admet 0 pour racine car $detA = 0$

c) est égal à $(2a-\lambda)(2b-\lambda)(2c-\lambda)$

d) est égal à $(\lambda-2a)(\lambda-2b)(\lambda-2c)$

# - PARTIE III -

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels.

On définit la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad y_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k.$$

On désigne par $\inf\limits_{n \geq p} x_n$ (resp. $\sup\limits_{n \geq p} x_n$) la borne inférieure (resp. supérieure) de l'ensemble $\{x_n / n \geq p\}$

**Question 23 :**

La suite de terme général $\inf\limits_{p \geq n} x_p$ , $n \in \mathbb{N}$ , est

a) convergente car décroissante et minorée
b) croissante et majorée mais divergente car elle n'est pas de signe constant
c) croissante, minorée et convergente
d) convergente car toute suite bornée converge.

**Question 24 :**

La suite $(\inf\limits_{p \geq n} y_p)_{n \in \mathbb{N}}$ est

a) décroissante et minorée car elle a les mêmes propriétés que la suite $(\inf\limits_{p \geq n} x_p)_{n \in \mathbb{N}}$
b) croissante et majorée donc convergente
c) divergente car la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge
d) minorée et convergente

**Question 25 :**

Les limites des suites $(\inf\limits_{p \geq n} x_p)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\inf\limits_{p \geq n} y_p)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient, si elles existent

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\inf\limits_{p \geq n} x_p) \leq \lim\limits_{n \to +\infty} (\inf\limits_{p \geq n} y_p)$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\inf\limits_{p \geq n} x_p) \geq \lim\limits_{n \to +\infty} (\inf\limits_{p \geq n} y_p)$

et celles des suites $(\sup\limits_{p \geq n} x_p)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sup\limits_{p \geq n} y_p)_{n \in \mathbb{N}}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sup\limits_{p \geq n} y_p) \geq \lim\limits_{n \to +\infty} (\sup\limits_{p \geq n} x_p)$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\inf\limits_{p \geq n} -y_p) \geq - \lim\limits_{n \to +\infty} (\sup\limits_{p \geq n} y_p) \geq - \lim\limits_{n \to +\infty} (\sup\limits_{p \geq n} x_p)$

**Question 26 :**

On considère dans cette question le cas particulier où la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n = (-1)^n$. On a alors

a) $y_n = 0$ si $n$ est impair et $y_n = \dfrac{1}{n+1}$ si $n$ est pair

b) $y_n = -\dfrac{1}{n+1}$ si $n$ est impair et $y_n = 0$ si $n$ est pair

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\inf\limits_{p \geq n} x_p) = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} (\sup\limits_{p \geq n} x_p)$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\inf\limits_{p \geq n} x_p) < \lim\limits_{n \to +\infty} (\inf\limits_{p \geq n} y_p) = \lim\limits_{n \to +\infty} (\sup\limits_{p \geq n} y_p) < \lim\limits_{n \to +\infty} (\sup\limits_{p \geq n} x_p)$

**Question 27 :**

On peut avoir pour certaines suites bornées $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente et $(\inf\limits_{p \geq n} x_p)_{n \in \mathbb{N}}$ divergente

b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergente et $(\inf\limits_{p \geq n} x_p)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente

et pour toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a l'équivalence

c) $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente$] \Leftrightarrow [(\inf\limits_{p \geq n} x_p)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sup\limits_{p \geq n} x_p)_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes$]$

d) $[(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente$] \Leftrightarrow [(\inf\limits_{p \geq n} x_p)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sup\limits_{p \geq n} x_p)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et ont même limite$]$

Soit $A$ un nombre réel non nul, $\alpha$ un élément de l'intervalle $]1,+\infty[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs convergeant vers 0 et vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty}\theta_n = A$ où

$\theta_n = u_n^{1-\alpha} - u_{n+1}\,u_n^{-\alpha} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

**Question 28 :**

On a nécessairement

a) $A<0$

b) $A>0$

et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

c) est convergente et a pour limite $(1-\alpha)\ A$

d) est divergente car $\forall n\in\mathbb{N} \quad x_n = [(1-\theta_n u_n^{\alpha-1})^{1-\alpha} - 1]u_n^{1-\alpha}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{1-\alpha} = +\infty$

**Question 29 :**

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$\forall n\in\mathbb{N} \quad x_n = u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha}$ et $y_n = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} x_k$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a) a pour limite $(\alpha-1)A$ car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(\alpha-1)A$

b) a pour limite $(1-\alpha)A$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite

c) $n^{\frac{1}{1-\alpha}}$

d) $[(1-\alpha)A]^{\frac{1}{1-\alpha}}\,n^{\frac{1}{1-\alpha}}$

# PARTIE IV

On considère la fonction réelle g définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} \text{ si } t \neq 0 \\ \ell \text{ si } t = 0 \text{ où } \ell \text{ est un réel fixé.} \end{cases}$$

**Question 30 :**

La fonction g est

a) dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour tout $\ell$ réel

b) continue mais non dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans le cas où $\ell = 1$

c) pour $\ell = 1$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et a pour dérivée $g'(t) = \begin{cases} \frac{\cos t}{t^2}(t - \tan t) \text{ si } t \neq 0 \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$

d) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ uniquement, pour tout $\ell \in \mathbb{R}$

**Question 31 :**

La fonction g est, pour tout $\ell$ réel

a) croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b) décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car $g'(t) \leq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

c) décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ mais n'est pas décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour $\ell \in \mathbb{R} - \{1\}$ car g' n'est pas définie en 0

d) décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ uniquement pour $\ell \geq 1$

**Question 32 :**

On a alors, pour tout $\ell$ réel

a) $1 \leq g(t) \leq g(\frac{\pi}{2}) \ \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

b) $\frac{2}{\pi} \leq g(t) \leq \ell \ \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

c) $\frac{2}{\pi} \leq g(t) \leq 1 \ \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

d) $\frac{2}{\pi} \leq g(t) \leq 1 \ \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$