

Concours Centrale - Supélec 2004

Épreuve : PHYSIQUE-CHIMIE

Filière PSI

Du silicium à la commande des machines électriques

La révolution technologique qu'a représenté le développement de la micro-électronique et de l'informatique depuis les années 1960 a soudainement montré l'importance du silicium, un élément chimique jusque-là connu des seuls spécialistes. L'avènement de composants d'électronique de puissance performants (IGBT, 1985), et de processeurs dédiés au traitement du signal (DSP, 1982), ont redéfini le domaine de la variation de vitesse des machines électriques. Le problème aborde divers aspects de cette évolution.

Partie I - Obtention du silicium

Les données thermodynamiques utiles sont fournies à la fin de cette partie (Tableau 1).

I.A - Obtention de silicium de qualité métallurgique

I.A.1) Rappeler en quoi consiste l'approximation d'Ellingham, et ses conséquences.

I.A.2) Donner les équations des droites d'Ellingham, relatives à une mole de O_2 , pour les couples CO_2/CO , CO/C et SiO_2/Si , pour $1500K < T < 2500K$. Tracer le diagramme correspondant. On prendra pour échelle 1 cm pour 100 K, 1 cm pour $50 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

I.A.3) Un mélange de coke C et de silice SiO_2 est placé dans un four à arc, sous 1 bar.

a) À quelle température minimum T_0 doit-on porter le milieu réactionnel pour former du silicium ? Sous quelle phase est-il obtenu ?

b) Quel est le gaz formé dans cette réaction ? Évaluer le volume de gaz dégagé à T_0 pour produire 1 tonne de silicium, ainsi que la quantité minimale nécessaire de silice et de coke.

I.B - Obtention de silicium de qualité électronique.

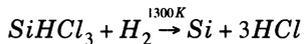
Le silicium obtenu précédemment comporte environ 2 % d'impuretés (fer et aluminium sous forme métallique essentiellement).

I.B.1) À 580 K , ce silicium impur est placé dans un courant gazeux de HCl , en présence d'un catalyseur.

Discuter la formation de $FeCl_3$, $SiCl_4$, $SiHCl_3$ en phase gazeuse, en justifiant. Peut-on conclure quant à la présence de $AlCl_3(g)$ en phase gazeuse ?

I.B.2) La phase gazeuse précédente est condensée à l'état liquide, puis portée à une température d'environ 350 K. Justifier cet ordre de grandeur de température.

Une distillation fractionnée permet par la suite d'isoler le trichlorosilane ($SiHCl_3$). Celui-ci est ensuite réduit :



Le silicium obtenu est pur à 99,98 %.

- Calculer la constante d'équilibre de la réaction à 1300 K.
- En déduire le coefficient de dissociation de $SiHCl_3$, à pression atmosphérique, si les réactifs sont introduits dans les conditions stœchiométriques.
- Quelle est l'influence d'une augmentation de température sur cet équilibre ? Justifier.

I.B.3) Le silicium ainsi obtenu doit encore être purifié pour la fabrication de circuits électroniques. Une technique de recristallisation (méthode de Czochralski) permet d'obtenir un lingot monocristallin (1 défaut pour 10^{12} atomes). Le silicium cristallise dans la structure diamant : c'est une structure cubique à face centrée dans laquelle un site tétraédrique sur deux est occupé. Déterminer, en notant a le paramètre de maille :

- la coordinence des atomes de Si .
- le nombre d'atomes de Si par maille.
- le rayon covalent de l'atome de Si , noté r_{Si} .
- la compacité de la structure.
- Application numérique.* Données pour Si :

$$M = 28,1 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}, \mu = 2330 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}, \mathcal{N} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

Calculer a et r_{Si} .

Données thermodynamiques :

Tableau 1 :

Composé (état de référence)	$\Delta_f H^0(298\text{K})$ $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$	$S^0(298\text{K})$ $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$	Température de changement d'état	ΔH^0 de change- ment d'état ($\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$)
AlCl_3 (solide)	-700	110	Sublimation : 460K	
Al (solide)	0	30		
C (solide)	0	10	Fusion : 3900K	
CO (gaz)	-110	200		
CO ₂ (gaz)	-390	210		
Fe (solide)	0	30		
FeCl ₃ (solide)	-400	140	Ébullition : 590K	
H ₂ (gaz)	0	130		
HCl (gaz)	-90	190	Ébullition de HCl (liquide) : 188K	
O ₂ (gaz)	0	200		
Si (solide)	0	20	Fusion : 1685 K	40
SiCl ₄ (gaz)	-660	330	Ébullition : 330K	
SiHCl ₃ (gaz)	-490	310	Ébullition de SiHCl ₃ (liquide): 305K	
SiO ₂ (solide)	-890	40	Fusion : 1880K	10

Si : $M = 28,1 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$; O : $M = 16,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$; C : $M = 12,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
 $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

Partie II - Diode

II.A - Semi-conducteurs

Dans un cristal de silicium, la rupture d'une liaison $Si-Si$ libère un électron, qui laisse derrière lui un « trou » (absence de liaison). La conduction électrique est assurée par les électrons (charge $-e$, concentration volumique n), et par les « trous » o^+ (charge $+e$, concentration volumique p). L'équilibre de la réaction $Si = e^- + o^+$ se traduit par $np = K_i$.

II.A.1) *Silicium intrinsèque.* À $330K$, $K_i = 1,4 \cdot 10^{32} m^{-6}$. En tenant compte de la neutralité électrique du métal, déterminer la concentration n_i d'électrons de conduction. Sachant que, dans le cuivre, chaque atome libère un électron de conduction, justifier que le cuivre soit meilleur conducteur que le silicium.

Données pour Cu : $M = 63,5 g.mol^{-1}$, masse volumique $\mu = 8900 kg.m^{-3}$.

II.A.2) *Silicium dopé N.* Dans le cristal de silicium, certains atomes de silicium (Si , $Z = 14$) sont remplacés par des atomes d'arsenic (As , $Z = 33$), à raison de N_D par m^3 .

a) Écrire les configurations électroniques de ces deux atomes et en déduire que l'arsenic joue le rôle de donneur d'électrons.

b) En déduire que $n \approx N_D$ et $p \approx n_i^2/N_D$ à l'équilibre, en supposant $N_D \gg n_i$, où n_i représente la concentration d'électrons de conduction du silicium intrinsèque (II.A.1).

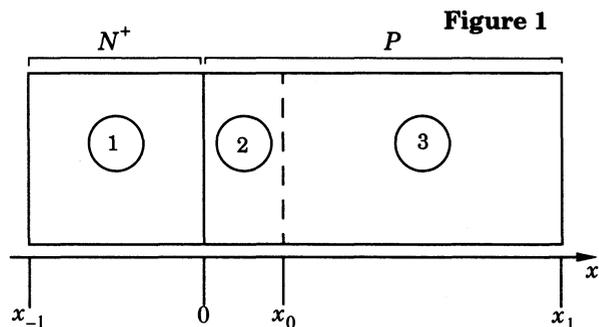
II.A.3) *Silicium dopé P.* Certains atomes de silicium sont remplacés par des atomes de bore (B , $Z = 5$), à raison de N_A par m^3 .

a) Écrire la configuration électronique du bore et en déduire que le bore joue le rôle d'accepteur d'électrons (ou donneur de trous).

b) En déduire que $p \approx N_A$ et $n \approx n_i^2/N_A$ à l'équilibre, en supposant $N_A \gg n_i$.

II.B - Jonction PN non polarisée

Soit (figure 1) une jonction N^+P unidimensionnelle, constituée de silicium, dopée N pour $x < 0$ et dopée P pour $x > 0$, avec $N_D \gg N_A \gg n_i$. Dans la zone 2 ($0 < x < x_0$), appelée zone de déplétion, n et p sont négligeables devant N_A : les nombreux électrons de la zone 1 diffu-



sent dans la zone P et s'annihilent suivant $e^- + o^+ \rightarrow Si$. Les zones 1 et 3 sont neutres.

II.B.1) Charge volumique $\rho(x)$.

a) Montrer que dans la zone de déplétion $\rho = -eN_A$.

b) La jonction étant globalement neutre, on admettra l'existence d'une densité surfacique de charge σ dans le plan $x = 0$. Donner sa valeur. Expliquer physiquement son origine.

II.B.2) Champ électrique $E(x)$.

a) Montrer que $\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$.

b) Le silicium est un diélectrique de permittivité ϵ . À partir d'une équation de Maxwell, déduire une relation différentielle entre $E(x)$ et $\rho(x)$.

II.B.3) Potentiel électrique $V(x)$.

Rappeler la relation différentielle entre $E(x)$ et $V(x)$.

II.B.4) E et V sont pris nuls dans la zone 1.

a) Montrer que E est aussi nul dans la zone 3.

b) Tracer sur le même graphe les courbes $\rho(x)$, $E(x)$ et $V(x)$, en indiquant les valeurs remarquables.

II.C - Diode polarisée.

La jonction N^+P est insérée entre deux conducteurs métalliques pour réaliser une diode. Les courants qui circulent dans la diode sont des courants d'électrons (concentration $n(x)$). Les conducteurs métalliques imposent l'équilibre du silicium aux limites : $n(x_{-1})$ et $n(x_1)$ ont les valeurs calculées en II.A.2 et II.A.3. $E(x)$ reste nul dans les zones 1 et 3, (V est choisi nul dans la zone 1).

L'étude est menée en régime stationnaire.

II.C.1) Densité de courant électrique de conduction \vec{j}_c .

La vitesse des électrons suit la loi $\vec{v} = -\eta\vec{E}$ (η est la mobilité des électrons). Montrer que

$$\vec{j}_c = \eta n(x) e E(x) \vec{u}_x.$$

II.C.2) Densité de courant électrique de diffusion \vec{j}_d . Le coefficient de diffusion des électrons est noté D . Montrer que

$$\vec{j}_d = eD \frac{dn(x)}{dx} \vec{u}_x.$$

Dans la suite on note $\vec{j}_t = j_t \vec{u}_x = \vec{j}_c + \vec{j}_d$ la densité de courant totale.

II.C.3) Zones 1 et 3.

a) Montrer que la concentration $n(x)$ suit une loi affine.

b) On note $d = x_1 - x_0 = -x_{-1}$. Calculer $\Delta n = n(0) - n(x_{-1}) = n(x_1) - n(x_0)$ en fonction de j_t , D , e et d .

c) *Application numérique* : pour une diode typique, on donne : $N_D = 10^{24} \text{ m}^{-3}$; $N_A = 10^{20} \text{ m}^{-3}$; $D = 35 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$; $d = 10 \text{ } \mu\text{m}$; $j_t = -50 \text{ A} \cdot \text{cm}^{-2}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Calculer la valeur de $|\Delta n|$. Montrer que $n(x)$ peut être considéré comme uniforme dans la zone 1, mais pas dans la zone 3.

d) En déduire $n(0)$ et $n(x_0)$, en fonction de N_A , N_D , n_i et Δn .

II.C.4) Zone 2.

Justifier le fait que $n(x)$ et $V(x)$ soient continus en 0 et x_0 .

En admettant que $|j_d| \gg |j_i|$, montrer que $n(x) = n(0) \exp\left(\frac{V(x)}{V_T}\right)$ et exprimer V_T en fonction de D et η .

II.C.5) Caractéristique courant-tension :

a) On pose $V_J = V(x_{-1}) - V(x_1)$. Exprimer les relations entre $n(0)$, $n(x_0)$, V_J et V_T puis entre n_i , N_A , N_D , Δn , V_J et V_T . Exprimer V_{J_0} , valeur de V_J pour $\Delta n = 0$.

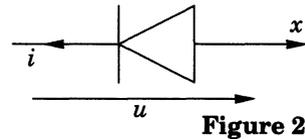


Figure 2

b) En admettant que $u = V_{J_0} - V_J$ représente la tension aux bornes de la diode (figure 2), montrer que dans la zone 3 :

$$j_t = \frac{n_i^2 e D}{d N_A} \left[1 - \exp\left(\frac{u}{V_T}\right) \right].$$

Que vaut j_t dans les autres zones ?

c) *Application numérique* : $V_T = 25 \text{ mV}$, section de la jonction PN $S = 1 \text{ cm}^2$. Calculer numériquement V_{J_0} et les valeurs de l'intensité i du courant pour $u = -0,1 \text{ V}$ et $u = 0,6 \text{ V}$. Commenter. Représenter l'allure de la caractéristique $i(u)$.

Partie III - Machine asynchrone

On cherche dans cette partie à développer pour cette machine un modèle équivalent à celui de la machine à courant continu.

III.A - Question préliminaire - Théorème de Ferraris

Soit un ensemble de p ($p \geq 3$) vecteurs unitaires \vec{u}_{xk} ($0 \leq k < p$) du plan Oxy , tels que $\vec{u}_{x0} = \vec{u}_x$, et pour $k > 0$, $(\vec{u}_{x(k-1)}, \vec{u}_{xk}) = \frac{2\pi}{p}$.

Soit \vec{u}_d le vecteur unitaire tournant à la vitesse Ω coïncidant avec \vec{u}_x à $t = 0$:

$$\vec{u}_d = \cos(\Omega t)\vec{u}_x + \sin(\Omega t)\vec{u}_y$$

On cherche à vérifier informatiquement la validité du théorème de Ferraris :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \cos\left(\Omega t - \frac{2k\pi}{p}\right) \vec{u}_{xk} = \frac{p}{2} \vec{u}_d.$$

III.A.1) En précisant le langage de calcul formel utilisé, proposer un type de données pour représenter un vecteur. Donner la représentation de \vec{u}_{x2} , pour $p = 3$.

III.A.2) Écrire une fonction $\mathbf{u}(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ renvoyant la représentation du vecteur \vec{u}_{xk} .

III.A.3) Écrire une fonction $\mathbf{s}(\mathbf{p})$ renvoyant la représentation du vecteur

$$\sum_{k=0}^{p-1} \cos\left(\Omega t - \frac{2k\pi}{p}\right) \vec{u}_{xk}.$$

III.A.4) Que doit renvoyer $\mathbf{s}(12)$?

III.B - Stator

Soit un ensemble de m bobines ($m = 3$, sur la figure 3) dont les axes O, \vec{u}_{xk} sont perpendiculaires à Oz , et tels que $(\vec{u}_{x(k-1)}, \vec{u}_{xk}) = \frac{2\pi}{m}$ pour $0 < k < m$. La bobine (k) est parcourue par un courant sinusoïdal de pulsation $\omega_s > 0$ représenté en notation complexe par :

$$\underline{I}_k = I_0 e^{j\left(\omega_s t - 2\pi \frac{k}{m}\right)},$$

algébrisé suivant le sens conventionnel représenté, avec I_0 réel positif.

III.B.1) Donner en notation complexe l'expression \vec{B}_k du champ magnétique créé en O par la bobine (k) en notant $B_0 = k_B I_0$ son module.

III.B.2) En déduire que ces bobines créent un champ tournant \vec{B} dont on donnera le module B , la vitesse et le sens de rotation et l'orientation à $t = 0$.

III.C - Machine asynchrone

Une machine est constituée en plaçant une « cage d'écureuil » (figure 4 a), le rotor, entre les bobines fixes de la question III.B dans une zone où \vec{B} sera supposé uniforme. Le rotor est en rotation autour de l'axe Oz à la vitesse $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ (ω est légèrement inférieur à ω_s). Cette cage sera considérée comme équivalente à n spires conductrices non jointives ($n = 4$ sur la figure 4 b). À $t = 0$, Ox_0 et Ox' (lié au rotor) coïncident. La spire $(0,0')$ est dans le plan vertical, orientée par $\vec{u}'_{x'} = \vec{u}'_{x_0}$.

De façon générale, la spire (k,k') est orientée par le vecteur unitaire \vec{u}'_{x_k} normal au plan la contenant et tel que $u'_{x_k} \cdot u'_{y'} \geq 0$. L et R représentent l'inductance et la résistance d'une spire, S sa surface. On prendra l'inductance mutuelle entre les spires du rotor nulle pour simplifier. Enfin on pose $\omega_r = \omega_s - \omega$ et on se place dans le référentiel du rotor.

III.C.1) À quelle vitesse la spire $(0,0')$ « voit-elle » le champ \vec{B} tourner ?

III.C.2) Montrer qu'elle est parcourue par un courant de pulsation ω_r , dont on donnera l'amplitude complexe \underline{i}_0 en fonction de :

$$m, k_B, I_0, R, L, \omega_r, S.$$

III.C.3) En déduire sans calcul, pour la spire (k,k') , l'expression de i_k en fonction de i_0 , k et n . Dans toute la suite, on pose

$$\underline{M}_k = \underline{i}_k S \vec{u}'_{x_k}, \quad a = \frac{mn}{4L} k_B S \quad \text{et} \quad \psi = \text{Arg}(R + jL\omega_r).$$

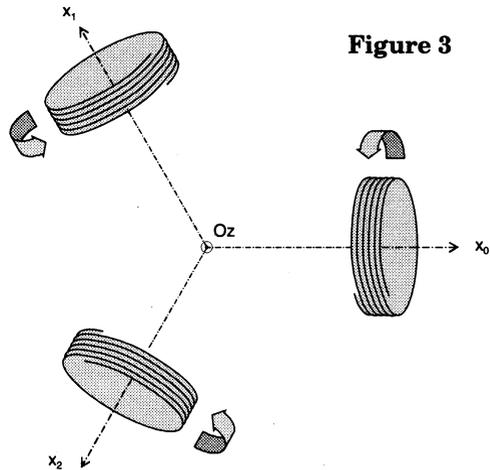


Figure 3

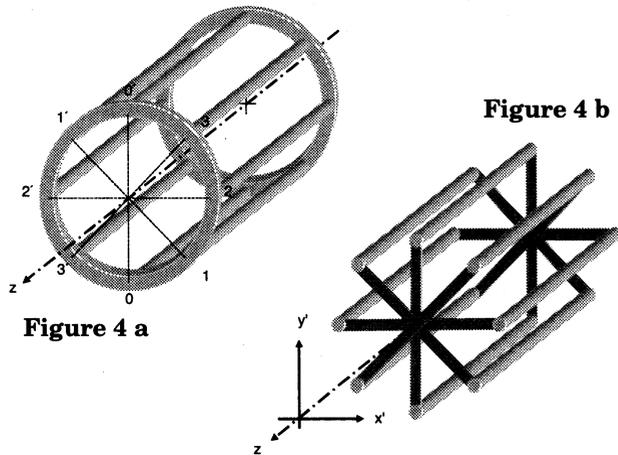


Figure 4 a

Figure 4 b

III.C.4) Exprimer \vec{M}_k en notation réelle, en introduisant $|i_0|$ et en posant :

$$t' = t - \frac{\pi/2 + \psi}{\omega_r}$$

III.C.5) En déduire soigneusement que le rotor se comporte comme un moment \vec{M} , tournant à la même vitesse que \vec{B} , en retard sur \vec{B} de $\frac{\pi}{2} + \psi$, et que $\|\vec{M}\| = aI_0S \sin\psi$. Quelle est la dimension de a ?

III.D - Couple

III.D.1) Mettre l'expression du couple exercé par le stator sur le rotor sous la forme $\Gamma = K(I_0 \cos\psi)(I_0 \sin\psi)$, en précisant l'expression de K en fonction de a , n et L .

III.D.2) On rappelle que pour une machine à courant continu $\Gamma' = K'I_{\text{inducteur}}I_{\text{induit}}$. Identifier, en le justifiant, $I_{\text{inducteur}}$ et I_{induit} .

III.E - Puissance

Les seules pertes considérées sont les pertes par effet Joule au rotor. Exprimer en fonction de K , ω , ω_r , I_0 et ψ :

III.E.1) la puissance $P_M = \Gamma\omega$ disponible sur l'arbre.

III.E.2) la puissance P_J dissipée dans le rotor.

III.E.3) Soit P la puissance totale absorbée par la machine. Montrer que $P = \Gamma\omega_s$.

III.E.4) La tension d'alimentation aux bornes de la bobine (k) du stator est sinusoïdale, de pulsation ω_s , d'amplitude complexe en convention récepteur

$$\underline{U}_k = U_0 e^{j(\omega_s t - 2\pi \frac{k}{m} + \theta)}$$

θ , avance de la tension sur le courant, est le même pour toutes les bobines. Exprimer P en fonction de I_0 , U_0 , m et θ .

III.F - Contrôle du couple

Le moteur précédent est alimenté par un onduleur de tension délivrant le système de tension polyphasé décrit en III.E.4 dans lequel les quantités ω_s et θ sont commandables. Les valeurs instantanées $I_k(t)$ des courants sont mesurées. Un calculateur détermine alors la commande de l'onduleur (figure 5). La tension U_0 est fixée à sa valeur nominale U_{0N} .

III.F.1) On fixe les valeurs de $\cos\theta$ et ω_s .

a) Montrer qu'alors les quantités I_0 , Γ et $1/\sin 2\psi$ sont proportionnelles.

b) Au démarrage, dans quel sens évoluent I_0 et Γ si $\psi < \pi/4$?

c) Dans quel sens doit-on faire évoluer ω_s pour que I_0 , Γ et $1/\sin 2\psi$ restent constants ?

III.F.2) On souhaite maintenir les quantités I_0 et Γ à leurs valeurs nominales I_{0N} et Γ_N . Montrer qu'il faut maintenir le rapport $\omega_0 = \omega_s / \cos \theta$ constant, et l'exprimer en fonction des valeurs nominales de la machine.

III.F.3) Dans la suite $m = 3$. La mise en œuvre du contrôle du couple nécessite la mesure de I_0 et $\omega_s(t)$. On pose ;

$$\underline{I_0} = I_0 e^{j\varphi(t)} \quad \text{avec} \quad \omega_s(t) = \frac{d\varphi}{dt}(t) \quad \text{à un instant } t \text{ quelconque.}$$

Montrer qu'un calculateur peut déduire I_0 et φ des $I_k(t)$, en donnant les expressions correspondantes de I_0^2 , $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$.

III.G - Application à la traction ferroviaire

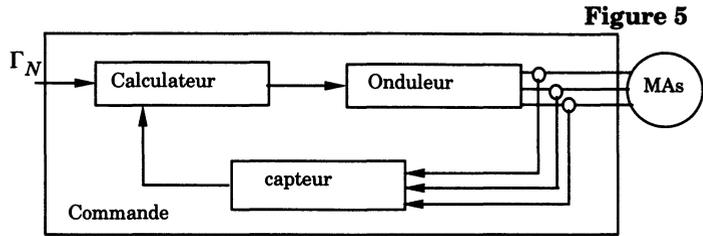
Soit un train de masse M , entraîné par N moteurs du type précédemment décrit. À pleine puissance, chaque moteur développe une puissance nominale P_N , le train roulant alors à la vitesse V_N et le couple valant Γ_N . La voie est plane et toutes les pertes sont négligées ainsi que l'inertie des parties tournantes. Pendant la phase de démarrage $V < V_N$, I_0 et Γ sont fixés à leurs valeurs nominales I_{0N} et Γ_N

III.G.1) Montrer que la vitesse du train suit la loi $v(t) = \frac{NP_N}{MV_N}t$.

III.G.2) *Application numérique* : TGV Transmanche (1994) :

$M = 793$ tonnes, $N = 12$, $P_N = 1020$ kW, $V_N = 300$ km · h⁻¹, $U_{Neff} = 1,8$ kV,

$(\cos \theta)_N \approx 1$. Calculer I_{0N} , l'accélération γ du train dans la phase de démarrage, ainsi que le temps T et la distance δ nécessaires pour atteindre la vitesse nominale. Commenter.



••• FIN •••