ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2004

**SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**
**Filière PSI**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**
**(L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).**

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2-Filière PSI.

Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le but de ce problème est l'étude de deux suites réelles $F = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $G = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et des séries entières de termes généraux $(f_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soient $F = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $G = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites réelles définies chacune par leurs deux premiers éléments et la même relation de récurrence ci-dessous :

$$F \;: f_0 = 0,\quad f_1 = 1,\qquad \text{pour tout entier naturel } n,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\ ;$$
$$G \;: g_0 = 2,\quad g_1 = 1,\qquad \text{pour tout entier naturel } n,\ g_{n+2} = g_{n+1} + g_n.$$

Soit $M_2$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2 ; soient $I$ la matrice unité et $J$ la matrice carrée définies par les relations suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\qquad J = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5}/2 \\ \sqrt{5}/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel $n$, soit $U_n$ la matrice définie par la relation suivante :

$$U_n = f_n J + \frac{1}{2} g_n I.$$

Soient $U$ la matrice $U_1$ $\left(U = U_1 = J + \frac{1}{2}I\right)$ et $E$ le sous-espace vectoriel de $M_2$ engendré par les deux matrices $I$ et $J$.

## Première partie

Le but de cette partie est l'étude alternée des deux suites de réels et de la suite des matrices ; elle permet d'obtenir des résultats préliminaires.

**Quelques propriétés :**

1. Démontrer que la suite des matrices $(U^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $U^n$ est la matrice $U$ élevée à la puissance $n$, (avec la convention habituelle $U^0 = I$), appartient à l'espace vectoriel $E$.

2. Établir la relation qui, pour tout entier naturel $n$, lie les matrices $U_{n+2}$, $U_{n+1}$ et $U_n$.

**Caractérisation de la suite de matrices $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ; quelques conséquences :**

3. Comparer, pour tout entier $p$ compris entre 0 et 2 $(0 \le p \le 2)$ les matrices $U_p$ et $U^p$.
Démontrer qu'il existe, pour tout entier naturel $n$, une relation simple entre les matrices $U_n$ et $U^n$.

4. Déduire des deux résultats précédents les relations suivantes :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \quad \det U_n = (-1)^n, \quad (g_n)^2 - 5\,(f_n)^2 = 4(-1)^n.$$

5. Étant donnés deux entiers naturels $p$ et $q$, exprimer les termes $f_{p+q}$ et $g_{p+q}$ des suites $F$ et $G$ en fonction des termes $f_p$, $g_p$, $f_q$ et $g_q$ de ces mêmes suites.

**Inverse des matrices $U_n$ :**

6. Déterminer l'inverse de la matrice $U_n$ en fonction des matrices $I$ et $J$. Exprimer les coefficients des matrices $I$ et $J$ à l'aide des réels $f_n$ et $g_n$.

**Des polynômes annulés par la matrice $U$**

Soit, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, $P_n(X)$ le polynôme défini par la relation suivante :

$$P_n(X) = X^n - f_n\,X - f_{n-1}.$$

7. Démontrer que le polynôme $P_n(X)$ est divisible par le polynôme $X^2 - X - 1$.

8. Quel est le polynôme caractéristique de la matrice $U$ ?

9. Calculer la valeur de la matrice $C_n = U^n - f_n\,U - f_{n-1}I$.

**Divisibilité du polynôme $X^{2n} - g_n\,X^n + (-1)^n$ par $X^2 - X - 1$ :**

Soit toujours $n$ un entier supérieur ou égal à 2 .

10. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $U_n$. En déduire la relation suivante :

$$U^{2n} - g_n\,U^n + (-1)^n I = 0.$$

11. Soient $Q$ et $R$ les polynômes obtenus en effectuant la division euclidienne du polynôme $X^{2n} - g_n\,X^n + (-1)^n$ par le polynôme $X^2 - X - 1$ :

$$X^{2n} - g_n\,X^n + (-1)^n = Q(X)\big(X^2 - X - 1\big) + R(X).$$

Préciser les degrés des polynômes $Q$ et $R$.
Démontrer, en utilisant par exemple les résultats de la question précédente, que le polynôme $X^{2n} - g_n\,X^n + (-1)^n$ est divisible par $X^2 - X - 1$.

## Deuxième partie

Le but de cette partie est l'étude de propriétés de suites construites à partir des deux suites $F$ et $G$.

**Un calcul de sommes :**

12. Le but de cette question est de calculer, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$), des expressions plus simples des deux expressions suivantes :

$$\alpha_n = f_0 + f_2 + \ldots + f_{2n} = \sum_{k=0}^{n} f_{2k}.$$

$$\beta_n = g_0 + g_2 + \ldots + g_{2n} = \sum_{k=0}^{n} g_{2k}.$$

Déterminer les expressions de $\alpha_n$ et de $\beta_n$ en fonction respectivement de $f_{2n+1}$ et de $g_{2n+1}$ en considérant par exemple la matrice $S_n$ définie par la relation suivante :

$$S_n = U_0 + U_2 + \ldots + U_{2n} = \sum_{k=0}^{n} U_{2k}.$$

Soit $T$ la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes :

$$t_0 = 1, \quad t_1 = 4, \quad \text{pour tout entier naturel } n,\ t_{n+2} = 4\,t_{n+1} + t_n.$$

**Détermination des éléments $t_n$ de la suite $T$ à l'aide des réels $f_n$ et $g_n$.**

13. Démontrer que le polynôme $X^6 - 4X^3 - 1$ est divisible par le polynôme $X^2 - X - 1$.

14. En déduire que la matrice $U$ vérifie, pour tout entier naturel $p$, la relation suivante :

$$U^{6+p} = 4\,U^{3+p} + U^p.$$

15. Déduire de la relation précédente que les termes des suites $F$ et $G$ vérifient, pour tout entier naturel $p$, les relations suivantes :

$$f_{6+p} = 4 f_{3+p} + f_p, \quad g_{6+p} = 4\,g_{3+p} + g_p.$$

16. Déduire des résultats précédents l'expression du terme général $t_n$ de la suite $T$, définie par les relations suivantes :

$$t_0 = 1, \quad t_1 = 4, \quad \text{pour tout entier naturel } n,\ t_{n+2} = 4\,t_{n+1} + t_n,$$

en fonction de termes des suites $F$ et $G$.

## Troisième partie

Le but de cette partie est l'étude des deux séries entières de termes généraux $a_n = f_n\, x^n$ et $b_n = g_n\, x^n$. Pour tout entier naturel $n$, soit $A_n$ la matrice définie par la relation suivante :

$$A_n = x^n\, U_n\,.$$

et $\Sigma_n(x)$ la somme des $n+1$ premières matrices $A_k$ :

$$\Sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k\, U_k\,.$$

17. Déterminer pour quelles valeurs du réel $x$ la matrice $I - x\,U$ est inversible et déterminer son inverse sous la forme d'une combinaison linéaire des matrices $I$ et $U$.

Il est admis qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'espace vectoriel $E$ tend vers 0, lorsque l'entier $n$ croît vers l'infini, si et seulement si tous les termes de la matrice $A_n$ tendent vers 0.

18. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel $x$ pour que la suite de matrices $\left(x^n\, U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0 lorsque l'entier $n$ croît vers l'infini.

19. En déduire, lorsque la condition obtenue sur le réel $x$ est réalisée, la limite de la suite de matrices $(\Sigma_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

20. À partir des résultats précédents, déterminer un minorant $\rho$ des rayons de convergence des deux séries entières de termes généraux $\left(f_n\, x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(g_n\, x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et les sommes $A(x)$ et $B(x)$ de ces deux séries :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n \quad ; \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n\, x^n.$$

FIN DU PROBLÈME