

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,  
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,  
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,  
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,  
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION

SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière PC

(Durée de l'épreuve : 4 heures ; l'usage de la calculatrice est autorisé)

Sujet mis à disposition des concours : Cycle international, ENSTIM, INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :  
Physique II – Filière PC

*L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PC, comporte 8 pages.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures.

Il ne faudra pas hésiter à formuler tout commentaire qui semblera pertinent, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

Notations : un vecteur est noté en gras ( $\mathbf{A}$ ) ; le vecteur unitaire pour la coordonnée  $\alpha$  est noté  $\mathbf{u}_\alpha$ .

## UN INDICE DE RÉFRACTION NÉGATIF ?

Nous nous proposons d'examiner quelques implications d'un *indice négatif*, phénomène dont on a spéculé l'existence dès 1964 et revendiqué l'observation en 2001, dans des matériaux composites réfractant la lumière dans la direction opposée à celle qui est dictée par les lois ordinaires de l'optique (Fig. 1) ! La même année, une réfutation détaillée des théories et des expériences de quarante ans de travaux était publiée. Cette

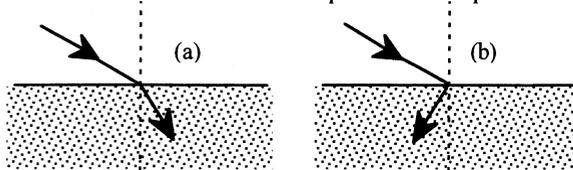


Fig. 1a : rayon lumineux dans un milieu d'indice positif

Fig. 1b : rayon lumineux dans un milieu d'indice négatif

réfutation n'a pas été, à ce jour, contredite.

Seule la dernière question de ce problème évoque rapidement un élément de réfutation, l'argument principal étant (a posteriori) simple, mais nettement hors

programmes. Les deux premières parties, assez proches du cours, concernent la propagation des ondes planes dans un matériau homogène et le passage de la lumière du vide dans un milieu homogène. Un paradoxe énergétique apparaîtra, qui sera levé dans les deux dernières parties.

## 1. Ondes planes dans un matériau homogène

L'espace étant repéré par le trièdre orthonormé  $Oxyz$ , on étudie la propagation d'une onde électromagnétique monochromatique plane dans un milieu isolant, neutre, linéaire et homogène de permittivité diélectrique  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ , et de perméabilité magnétique  $\mu = \mu_0 \mu_r$ , l'une et l'autre positives. En notation complexe standard, le champ électrique de cette onde, polarisée selon la direction de vecteur unitaire  $\mathbf{u}_y$ , s'écrit  $\underline{\mathbf{E}} = E_0 \mathbf{u}_y \exp j(\omega t - kz)$ , ce qui définit le vecteur de propagation  $\mathbf{k} = k \mathbf{u}_z$  et l'amplitude vectorielle,  $\mathbf{E}_0$ , de ce champ ;  $E_0$  est réel.

*Quelques relations d'électromagnétisme et d'analyse vectorielle sont indiquées dans l'annexe, en fin de problème.*

□ 1 – Dédire des équations de Maxwell l'expression du champ  $\underline{\mathbf{B}}$  de cette onde et celle de la valeur moyenne temporelle de son vecteur de Poynting,  $\langle \mathbf{S} \rangle_t$ . Préciser l'orientation de ces deux vecteurs. Interpréter physiquement le vecteur de Poynting et comparer sa direction et son sens à ceux du vecteur de propagation  $\mathbf{k}$ .

□ 2 – L'indice de réfraction d'une onde dans un milieu, noté  $n$ , est généralement défini comme le quotient de la vitesse de cette onde dans le vide,  $c$ , par la vitesse de la lumière dans ce milieu,  $v$ . Établir l'équation de propagation du champ électromagnétique (équation de d'Alembert) et en déduire l'expression de  $n = c/v$  en fonction de  $\varepsilon_r$  et de  $\mu_r$ . Cet indice est, à l'évidence, une quantité positive.

□ 3 – Supposons maintenant que, par un artifice quelconque, on ait pu obtenir *simultanément*  $\varepsilon < 0$  et  $\mu < 0$ . Reprendre l'étude des questions [1] et [2]. Comment définir, dans ces conditions, le sens de propagation de l'onde (selon  $\mathbf{k}$  ou selon le vecteur de Poynting  $\mathbf{S}$ ) ?

## 2. Passage de la lumière du vide dans un matériau homogène

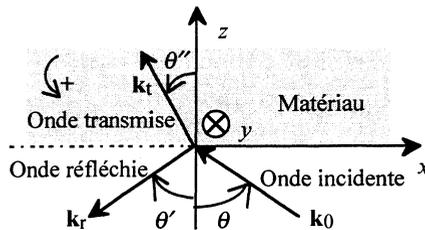


Fig. 2 : Notations et conventions de signe pour les lois de Descartes

Considérons les lois de Descartes de la réfraction, en prêtant attention à l'orientation des angles. Le plan d'équation  $z = 0$  sépare l'espace en deux régions ; la région  $z < 0$  contient de l'air, dont les propriétés électromagnétiques sont celles du vide, la région  $z > 0$  contient un isolant, linéaire, isotrope et, pour le moment, « ordinaire » :  $\varepsilon > 0$  et  $\mu > 0$ .

L'onde incidente, provenant de la région  $z < 0$ , est monochromatique plane, de fréquence angulaire  $\omega$  ; son vecteur d'onde, noté  $\mathbf{k}_0$  et situé dans le plan  $xOz$ , fait un angle  $\theta > 0$  avec la verticale (Fig. 2). Le champ électrique de cette onde est noté  $\underline{\mathbf{E}}_i$  ; la notation

$$\underline{\mathbf{E}}_i = \mathbf{A}_i \exp i \left[ \omega t + \underbrace{k_0 x \sin(\theta) - k_0 z \cos(\theta)}_{= -\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} \right] = \underbrace{\mathbf{A}_i}_{=\mathbf{A}_i} \exp i [\omega t + k_0 x \sin(\theta) - k_0 z \cos(\theta)]$$

précise la structure du champ et les notations : seule la composante  $A_{iy}$  de l'amplitude  $\mathbf{A}_i$  n'est pas nulle ; le vecteur d'onde incident est  $\mathbf{k}_0 = -k_0 \sin(\theta) \mathbf{u}_x + k_0 \cos(\theta) \mathbf{u}_z$ .

□ 4 – Quelle relation géométrique doit-on avoir entre  $\mathbf{k}_0$  et  $\mathbf{A}_i$  ?

□ 5 – L'onde incidente engendre d'une part une onde réfléchie, de champ électrique  $\underline{\mathbf{E}}_r$ , d'amplitude  $\mathbf{A}_r$  de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_r = k_{rx} \mathbf{u}_x + k_{ry} \mathbf{u}_y + k_{rz} \mathbf{u}_z$  et de fréquence angulaire  $\omega_r$ , d'autre part une onde transmise de champ électrique  $\underline{\mathbf{E}}_t$ , d'amplitude  $\mathbf{A}_t$  de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_t = k_{tx} \mathbf{u}_x + k_{ty} \mathbf{u}_y + k_{tz} \mathbf{u}_z$  et de fréquence angulaire  $\omega_t$ . En considérant, pour toute valeur de  $x$  et de  $y$ , et à chaque instant, les relations de continuité en  $z=0$  des composantes appropriées des champs électriques (on pourra éventuellement se référer à l'annexe), établir que tous les champs ont la même fréquence angulaire  $\omega$  ; établir aussi les relations

$$k_{tx} = k_{rx} = -k_0 \sin(\theta),$$

$$k_{0y} = k_{ry} = k_{ty} = 0.$$

□ 6 – Montrer que l'on retrouve ainsi les lois de Descartes pour la réfraction et la réflexion.

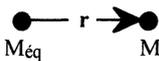
□ 7 – On considère maintenant le cas où  $\varepsilon < 0$  et  $\mu < 0$ , tel qu'envisagé à la question [3]. Si un milieu doté de ces deux propriétés existe, on dira que ce milieu est *négatif*. On convient que, dans la région  $z > 0$ , la direction de propagation de l'onde transmise est dans le sens des  $z$  croissant. Exprimer alors le vecteur  $\mathbf{k}_t$ . On illustrera ce résultat par un schéma, en imposant  $\theta > 0$ , c'est-à-dire  $k_{0x} < 0$  et  $k_{0z} > 0$ . On représentera les vecteurs d'onde des ondes incidente et transmise, et l'on indiquera leurs directions respectives de propagation par des vecteurs unitaires  $\mathbf{s}_i$  et  $\mathbf{s}_t$ . Peut-on dire, au sens de la question [2], c'est-à-dire en termes de rapport de vitesses, que l'indice du milieu est négatif ?

□ 8 – On définit maintenant l'indice de réfraction par  $n = \frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta')}$ ,  $\theta$  et  $\theta'$  se référant à la direction de propagation de l'énergie. Quel est, en ce sens, le signe de  $n$  ?

□ 9 – Et voici qu'une difficulté surgit : quel serait le signe de la densité volumique d'énergie dans un tel milieu, si on la calculait en appliquant la formule classique de l'électromagnétisme ? Qu'impliquerait ce résultat, sachant que l'évolution spontanée d'un système se fait toujours vers une diminution de son énergie ?

Il est donc nécessaire, si les milieux négatifs existent, de considérer avec soin la notion de densité volumique moyenne d'énergie dans un diélectrique. Les parties suivantes esquissent une approche simplifiée de ce problème délicat.

### 3. Densité de l'énergie dans les diélectriques sans pertes



Un diélectrique linéaire isotrope homogène et de perméabilité magnétique  $\mu_0$  est considéré ici comme une assemblée de  $N$  électrons par unité de volume, répartis uniformément dans l'espace ( $N$  est constant). On note  $M_{\text{éq}}$  la position d'équilibre d'un électron représentatif en l'absence de champ électrique et  $M$  la position de cet électron dans le cas général ; cela définit le vecteur  $\mathbf{r}$ , représenté sur la figure ci-contre. Les électrons sont reliés élastiquement à leurs positions d'équilibre respectives par la force de rappel  $\mathbf{f} = -A\mathbf{r}$ , où  $A$  est une constante positive. Leur pulsation propre est donc

$\omega_0 = \sqrt{\frac{A}{m}}$ , où  $m$  est la masse électronique. Une autre pulsation caractéristique, la pulsation de plasma,  $\omega_p$ , est définie par  $\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{m\epsilon_0}$ , où  $\epsilon_0$  la permittivité diélectrique du vide et  $q$  la charge électronique ( $q = -e = -1,6 \times 10^{-19}$  C).

### Régime statique

On suppose qu'existe dans un tel milieu un champ électrostatique uniforme,  $\mathbf{E}_0$ . On note  $\mathbf{r}_{E_0}$  le déplacement permanent des électrons sous l'action de ce champ et  $e_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\mathbf{E}_0\|^2$ .

□ 10 – Exprimer la densité volumique d'énergie potentielle  $u_{pot} = u_{pot}(A, N, \|\mathbf{r}_{E_0}\|)$ ; interpréter cette densité d'énergie en termes de travail électrique. On convient que la densité volumique totale d'énergie électrique, notée  $u_e$ , est ici la somme de  $u_{pot}$  et de la densité volumique de l'énergie du champ électrostatique. Établir alors la relation  $u_e = \epsilon_r e_0$ , avec  $\epsilon_r = 1 + \chi_s$ , où  $\chi_s = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}$  désigne la *susceptibilité électrique statique* du milieu.

### Régime dynamique

Une onde électromagnétique plane transverse monochromatique de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = k \mathbf{u}_z$  se propage maintenant dans le milieu. Le champ électrique de cette onde est noté  $\mathbf{E}(t, z) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kz)$ . La phase étant définie par  $\varphi = \omega t - kz$ , on pose, en notation complexe,  $\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0 \exp(j\varphi)$ . La longueur d'onde est très grande devant le déplacement  $\|\mathbf{r}\|$  des électrons sous l'action du champ. On néglige l'absorption du milieu diélectrique à la pulsation  $\omega$ .

□ 11 – Estimer la vitesse des électrons correspondant à la densité de courant  $j = 10 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$  dans un métal (il faudra se donner ou trouver une estimation de la concentration électronique  $N$  dans un tel milieu). Justifier que la force magnétique (force de Laplace) est négligeable. Exprimer, en notation complexe, les réponses forcées en position ( $\underline{\mathbf{r}}$ ) et en vitesse ( $\underline{\mathbf{v}}$ ), à la force électrique. Donner les expressions des vecteurs réels  $\mathbf{r}(t, z)$  et  $\mathbf{v}(t, z)$ .

□ 12 – Établir que la densité volumique d'énergie potentielle  $u_{pot}$ , associée aux oscillations des électrons décrites par  $\mathbf{r}(t, z)$ , peut s'écrire  $u_{pot}(\omega) = e_0 \times g(\omega, \omega_0, \omega_p) \times \cos^2(\varphi)$ , où  $g$  est une fonction dont on donnera l'expression. Exprimer  $g$  en fonction de  $\chi_s$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ .

□ 13 – Établir que la densité volumique d'énergie cinétique  $u_{cin}$ , associée à la vitesse  $\mathbf{v}(t, z)$ , peut s'écrire sous la forme  $u_{cin}(\omega) = e_0 \times \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \times g(\omega, \omega_0, \omega_p) \times \sin^2(\varphi)$ .

□ 14 – Déterminer la puissance volumique cédée par l'onde au milieu. En déduire que la densité volumique de travail reçu par les électrons,  $w(\omega)$ , s'écrit (sous l'hypothèse que

$w(\omega) = 0$  lorsque  $\mathbf{E}_0 \cos(\varphi) = \mathbf{0}$ , c'est-à-dire lorsque  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  :  $w(\omega) = e_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos^2(\varphi)$ .

Une écriture équivalente de ce résultat est  $w(\omega) = e_0 \frac{\chi_s}{1 - x^2} \cos^2(\varphi)$ .

□ 15 – Contrairement à la situation correspondant à une excitation statique du milieu, le travail volumique des forces électriques  $w(\omega)$  et la densité d'énergie potentielle  $u_{\text{pot}}(\omega)$  ne sont maintenant plus identiques. Définissant  $u_{\text{pot}}^{(1)}(\omega)$  par  $u_{\text{pot}}(\omega) = u_{\text{pot}}^{(1)}(\omega) + w(\omega)$ , montrer que la somme  $u_m = u_{\text{cin}}(\omega) + u_{\text{pot}}^{(1)}(\omega)$  est interprétable comme une densité uniforme d'énergie mécanique « immobile », c'est-à-dire non propagative.

□ 16 – En s'inspirant notamment de la question 10 et compte-tenu des résultats de la question 14, définir une densité totale d'énergie électrique par  $u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \underbrace{\|\mathbf{E}\|^2}_{=E_0^2 \cos^2(\varphi)}$ , avec

$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \chi_e(\omega)$ , introduisant ainsi la permittivité diélectrique relative,  $\varepsilon_r$  et la susceptibilité électrique dynamique,  $\chi_s$ , du milieu. Montrer que  $\chi_e(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \chi_s$ .

□ 17 – Justifier que, en notation complexe, la relation de Maxwell-Ampère dans le milieu diélectrique considéré s'écrit  $\mathbf{k} \wedge \mathbf{B} = \frac{\omega}{c^2} \left( \frac{Nq\mathbf{r}}{\varepsilon_0} - \mathbf{E} \right)$ , où  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  est la vitesse du rayonnement électromagnétique dans le vide. Déterminer la relation de dispersion du milieu sous la forme  $k^2 = F(\omega^2)$ .

□ 18 – Tracer sommairement la courbe représentative de la relation  $k^2 = F(\omega^2)$  et en déduire celle de la relation  $\omega(k)$  pour  $k > 0$  et  $\omega > 0$ . On introduira la pulsation longitudinale  $\omega_L = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$  ( $x_L^2 = 1 + \chi_s$ ). Quel est le comportement du milieu pour  $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_L$  ?

□ 19 – Établir que la vitesse de phase  $v_\varphi$  est  $v_\varphi = \frac{c}{[\varepsilon_r(\omega)]^{\frac{1}{2}}}$ . Établir, entre  $v_\varphi$  et la vitesse

de groupe  $v_g$ , la relation  $v_\varphi = \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega}{1 + \chi_e} \frac{d\chi_e}{d\omega} \right) v_g = \left( \frac{1 + g}{1 + \chi_e} \right) v_g$  ( $\chi_e$  est défini à la question 16). En déduire l'inégalité  $v_\varphi \geq v_g$ .

□ 20 – Montrer que la densité d'énergie magnétique  $u_b$  et la densité d'énergie électrique  $u_e$  sont égales. Exprimer, en fonction de  $e_0$  et de  $\chi_e$ , la moyenne temporelle de la densité d'énergie électromagnétique  $u_{em} = u_e + u_b$ .

□ 21 – Exprimer le vecteur de Poynting  $\mathbf{S}$  en fonction de  $c$ ,  $k$ ,  $\omega$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $E_0$ ,  $\varphi$  et du vecteur unitaire  $\mathbf{u}_k$  de la direction  $\mathbf{k}$ . Exprimer la moyenne temporelle de  $\langle \mathbf{S} \rangle_t$  en fonction de  $e_0$  et de  $\varepsilon_r$ . Exprimer la moyenne temporelle de la densité totale d'énergie,  $u_t = u_{em} + u_m$  en fonction de  $e_0$  et de  $g(\omega, \omega_0, \omega_p)$ .

□ 22 – Vérifier la relation  $\frac{\langle u_t \rangle}{\langle u_{em} \rangle} = \frac{v_\varphi}{v_g}$ . À quelle vitesse se propage  $\langle u_t \rangle$  ? À quelle vitesse se propage  $u_{em}$  ?

□ 23 – Proposer une interprétation des résultats obtenus dans cette partie, en remarquant que seule une partie de  $u_t$  se propage véritablement.

#### 4. Densité de l'énergie dans les diélectriques faiblement absorbants

##### Réponse linéaire causale

Le vecteur excitation électrique  $\mathbf{D}(t)$  est défini par  $\mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(t) + \mathbf{P}(t)$ , où  $\mathbf{P}(t)$  désigne le vecteur polarisation. Dans un milieu linéaire et isotrope,  $\mathbf{P}(t) = \epsilon_0 \int_0^\infty h(u) \mathbf{E}(t-u) du$ , où  $h$ , dite *réponse percussionnelle*, est une fonction réelle du temps, déterminée par les propriétés du milieu. Cette relation montre que la polarisation à l'instant  $t$  est due au champ électrique à tous les instants antérieurs à l'instant  $t$  considéré (c'est une expression de la causalité).

□ 24 – Quelle est la dimension de la fonction  $h$  ? Établir que, pour le champ électrique sinusoïdal  $\underline{\mathbf{E}}_\omega(t) = \mathbf{E}_0(\omega) \exp(-j\omega t)$  et pour un milieu linéaire et isotrope caractérisé par sa réponse percussionnelle  $h$ , on peut écrire<sup>1</sup>  $\underline{\mathbf{D}}_\omega(\omega) = \epsilon(\omega) \mathbf{E}_0(\omega) = \epsilon_0 \underbrace{[1 + \chi_e(\omega)]}_{=\epsilon_r(\omega)} \mathbf{E}_0(\omega)$  :

exprimer la permittivité complexe  $\chi_e(\omega)$  en fonction d'une intégrale faisant intervenir  $h$ .

□ 25 – On donne  $h(u) = \frac{\omega_p^2}{v_0} \exp\left(-\frac{\gamma u}{2}\right) \sin(v_0 u)$ . Les paramètres  $\omega_p$ ,  $\gamma$  et  $v_0$  ont tous la dimension de l'inverse d'un temps. Tracer l'allure de  $h(u)$ . Calculer  $\epsilon_r(\omega)$  ; l'intégration est facilitée si l'on pose  $\sin(v_0 u) = \frac{\exp(jv_0 u) - \exp(-jv_0 u)}{2j}$ . On trouvera pour  $\epsilon_r(\omega)$  une

forme familière, en fonction de  $\omega_p$ ,  $\gamma$  et  $\omega_0^2 = v_0^2 + \frac{\gamma^2}{4}$ .

##### Onde monochromatique

Le champ électrique d'une onde électromagnétique plane monochromatique de pulsation  $\omega_0$  s'écrit, en notant  $g^*$  le complexe conjugué d'une grandeur  $g$ , vectorielle ou scalaire :

$$\mathbf{E}(t) = \Re[\underline{\mathbf{E}}_0 \exp(-j\omega_0 t)] = \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{E}}_0 \exp(-j\omega_0 t) + \underline{\mathbf{E}}_0^* \exp(j\omega_0 t)].$$

En termes de la permittivité complexe  $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + j\epsilon''(\omega)$ ,

$$\underline{\mathbf{D}}_0 = [\epsilon'(\omega_0) + j\epsilon''(\omega_0)] \underline{\mathbf{E}}_0 \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{D}}_0^* = \epsilon^*(\omega_0) \underline{\mathbf{E}}_0.$$

L'identité  $\text{div}(\mathbf{S}) = \text{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) = -\left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)$ , déduite des équations de Maxwell,

pour un milieu dénué de courants libres, fait intervenir la quantité  $w_e(t) = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ , densité volumique de puissance dissipée dans ce milieu diélectrique.

<sup>1</sup> La transformée de Fourier de  $X(t)$  est notée  $X(\omega)$  ; le symbole de la grandeur est conservé, seul a changé la variable dont cette dernière dépend : temps, ou pulsation. Aucune confusion n'est possible.

□ 26 – Montrer que la moyenne temporelle de  $w_e(t)$  sur une période  $T_0$  est

$$\langle w_e \rangle_{T_0} = \frac{1}{2} \omega_0 \varepsilon''(\omega_0) \|\mathbf{E}_0\|^2.$$

### Onde quasi monochromatique

Un champ vectoriel réel quelconque,  $\mathbf{V}(t)$ , est noté  $\Re[\underline{\mathbf{V}}(t)]$  :  $\mathbf{V}(t) = \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{V}}(t) + \underline{\mathbf{V}}^*(t)]$ . Les *composantes de Fourier* de  $\underline{\mathbf{V}}(t)$ , dites encore *composantes spectrales* sont définies par la relation, que l'on admettra,  $\underline{\mathbf{V}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{V}}_0(\omega) \exp(-j\omega t) d\omega$  : c'est l'analyse de Fourier vectorielle de  $\underline{\mathbf{V}}(t)$ .

On nomme onde quasi-monochromatique de pulsation fondamentale  $\omega_0$ , et l'on note  $\underline{\mathbf{X}}(t)$ , le produit par  $\exp(-j\omega_0 t)$  d'une fonction vectorielle complexe  $\underline{\mathbf{X}}_0(t)$  lentement variable à l'échelle de la période  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ . La fonction vectorielle  $\underline{\mathbf{X}}_0(t)$  se nomme enveloppe (voir un exemple en annexe). On a donc

$$\underline{\mathbf{X}}(t) = \underline{\mathbf{X}}_0(t) \exp(-j\omega_0 t) \text{ et réciproquement } \underline{\mathbf{X}}_0(t) = \underline{\mathbf{X}}(t) \exp(j\omega_0 t).$$

Par analyse de Fourier de  $\underline{\mathbf{X}}(t)$ , on a aussi  $\underline{\mathbf{X}}_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{X}}_0(\omega) \exp[j(\omega_0 - \omega)t] d\omega$ .

□ 27 – On considère le champ électrique  $\underline{\mathbf{E}}(t) = \underline{\mathbf{E}}_0(t) \exp(-j\omega_0 t)$  d'une onde électromagnétique quasi-monochromatique de pulsation fondamentale  $\omega_0$ . Montrer que la moyenne temporelle de  $E^2(t)$  sur une période  $T_0$  est  $\langle E^2 \rangle_{T_0} = \frac{1}{2} \langle \underline{\mathbf{E}}_0 \cdot \underline{\mathbf{E}}_0^* \rangle_{T_0} = \frac{1}{2} E_0^2(t)$ .

□ 28 – L'hypothèse d'enveloppe lentement variable entraîne la relation, que l'on admettra<sup>1</sup>,

$$\left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\rangle_{T_0} = \frac{1}{2} \Re \left\{ F(\omega_0) \underline{\mathbf{E}}_0 \cdot \underline{\mathbf{E}}_0^* - j \left( \frac{dF}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} \underline{\mathbf{E}}_0 \cdot \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}_0^*}{\partial t} \right\}, \text{ avec } F(\omega) = -j\omega \varepsilon(\omega).$$

Démontrer alors que, dans un milieu non absorbant,  $\left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right\rangle_{T_0} = \frac{1}{2} \frac{d[\omega \varepsilon(\omega)]}{d\omega} \frac{\partial \langle E^2 \rangle_{T_0}}{\partial t}$ .

□ 29 – Une théorie de la propagation dans un milieu dispersif de perméabilité magnétique  $\mu(\omega)$  montre que la moyenne temporelle de la densité d'énergie électromagnétique est

$$\langle u_i \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \frac{d[\omega \varepsilon(\omega)]}{d\omega} \langle E^2 \rangle + \frac{d[\omega \mu(\omega)]}{d\omega} \langle H^2 \rangle \right\}.$$

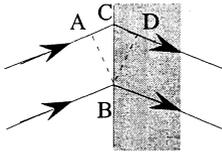
Il n'est plus nécessaire dès lors d'avoir  $\varepsilon > 0$ , il suffit que  $\frac{d[\omega \varepsilon(\omega)]}{d\omega} > 0$ . Montrer, en utilisant un résultat de la question 20, que les champs monochromatiques  $\underline{\mathbf{E}}(t) = \underline{\mathbf{E}}_0 \exp(-j\omega_0 t)$  et  $\underline{\mathbf{H}}(t) = \underline{\mathbf{H}}_0 \exp(-j\omega_0 t)$  vérifient cette théorie dans le milieu diélectrique négatif de per-

<sup>1</sup> On a utilisé, pour l'établissement de cette relation, le fait que les composantes spectrales  $\underline{\mathbf{E}}_0(\omega)$  sont négligeables pour des pulsations  $\omega$  ne vérifiant pas  $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ .

méabilité magnétique  $\mu = \mu_0$  de la troisième partie, c'est-à-dire, en d'autres termes, que, si  $\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$ , on a bien  $\langle u_i \rangle = \epsilon_0(1 + g)$ , où l'expression de  $g$  a été établie à la question 12.

### Réfutation !

La théorie et la mise en évidence des matériaux d'indice négatif ont été réfutées en 2001, après une quarantaine d'année d'efforts soutenus sur le sujet. Voici un élément de réfutation tel que proposé par Valanju :

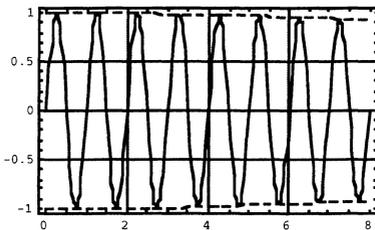


Le matériau négatif est à droite. Supposons que BA représente un front d'onde de signal (et pas de phase), perpendiculaire aux rayons (B est situé sur l'interface) et supposons que le signal continue de se propager de la gauche vers la droite ; cela signifierait que le point A passe instantanément en C sur l'interface puis en D.

□ 30 – Quelles sont les implications de cette affirmation ?

## ANNEXE

A) Un exemple d'enveloppe lentement variable



Le trait plein représente la fonction

$$\exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right] \times \sin(2\pi t) = E_\sigma(t) \times \sin(2\pi t).$$

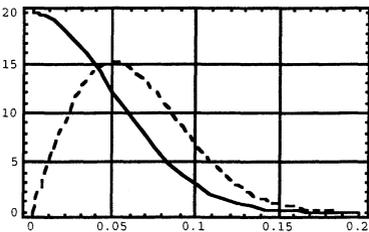
Les pointillés représentent l'enveloppe

$$\pm E_\sigma(t), \text{ avec } \sigma = 8.$$

La composante de Fourier de  $E_\sigma(t)$ , soit

$$E_\sigma(\omega) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\sigma\omega)^2\right],$$

est représentée ci-contre et en trait plein, pour  $\omega > 0$  ; la figure en pointillés représente  $\omega E_\sigma(\omega)$ .



B) Équations de Maxwell

$$\text{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad \text{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{div}(\mathbf{D}) = \rho \quad \text{div}(\mathbf{B}) = 0$$

C) Relations de continuité

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = \sigma \quad (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n}_{12} = 0 \quad \mathbf{j}_s = \mathbf{n}_{12} \wedge (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \quad \mathbf{n}_{12} \wedge (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

D) Ondes planes

$$\text{Si } \mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \exp[\mathcal{I}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \text{ div}(\mathbf{X}) = \mathcal{I} \mathbf{k} \cdot \mathbf{X}, \text{ rot}(\mathbf{X}) = \mathcal{I} \mathbf{k} \wedge \mathbf{X} \text{ et } \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = -j\omega \mathbf{X}.$$

**FIN DE L'ÉPREUVE**