

**ÉCOLE POLYTECHNIQUE**  
**ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES**

CONCOURS D'ADMISSION 2004

FILIÈRE **PC**

**COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

**Polynômes unitaires de norme minimale**

Pour tout entier  $d \geq 0$ , on désigne par  $\mathcal{E}_d$  l'espace vectoriel complexe des polynômes à coefficients complexes de degré  $\leq d$  et par  $\mathcal{U}_d$  le sous-ensemble des polynômes unitaires de degré  $d$ .

**Première partie**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soient  $x_1, \dots, x_n$  des nombres complexes distincts. On considère le polynôme

$$P(X) = \prod_{1 \leq k \leq n} (X - x_k),$$

et l'on désigne par  $P'$  le polynôme dérivé de  $P$ .

1. Pour tout entier  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , on pose

$$P_j(X) = \frac{P(X)}{(X - x_j) P'(x_j)}.$$

a) Montrer que cette expression définit un polynôme  $P_j$  de degré  $n - 1$ .

b) Calculer  $P_j(x_k)$ , pour  $1 \leq k \leq n$ , et montrer que, pour tout polynôme  $F$ , le polynôme  $L_F = \sum_{j=1}^n F(x_j) P_j$  prend la même valeur que  $F$  en tous les points  $x_1, \dots, x_n$ .

c) Montrer que  $\sum_{j=1}^n P_j = 1$ .

d) Les polynômes  $P_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , forment-ils une base de  $\mathcal{E}_{n-1}$  ?

2. Pour  $1 \leq j \leq n$ , on pose  $P_j(X) = \sum_{i=0}^{n-1} b_{i,j} X^i$ , où  $b_{i,j} \in \mathbf{C}$ . Soient  $V$  et  $B$  les matrices complexes  $n \times n$  dont les éléments à la  $i^{\text{e}}$  ligne ( $1 \leq i \leq n$ ) et à la  $j^{\text{e}}$  colonne ( $1 \leq j \leq n$ ) sont  $(x_i)^{j-1}$  et  $b_{i-1,j}$ , respectivement. Montrer que  $V$  est inversible, et que  $V$  et  $B$  sont inverses l'une de l'autre.

3.a) Montrer que  $b_{n-1,j} = \frac{1}{P'(x_j)}$ . Déterminer la valeur de  $\sum_{k=1}^n \frac{(x_k)^j}{P'(x_k)}$  pour  $0 \leq j \leq n-1$ .

b) En déduire que  $\sum_{k=1}^n \frac{(X - x_k)^{n-1}}{P'(x_k)}$  est un polynôme constant que l'on calculera.

\*\*\*

Dans toute la suite du problème,  $d \in \mathbf{N}^*$  est un entier fixé, et  $K$  est une partie compacte du plan complexe, contenant au moins  $d+1$  éléments. On pose  $\rho = \sup_{z \in K} |z|$ . Pour tout polynôme  $Q \in \mathcal{E}_d$ , on pose

$$\|Q\|_K = \sup_{z \in K} |Q(z)|.$$

### Deuxième partie

Pour tout polynôme  $Q \in \mathcal{E}_d$ , défini par  $Q(X) = \sum_{i=0}^d a_i X^i$ , on pose

$$N(Q) = \sup_{0 \leq i \leq d} |a_i|.$$

4.a) Montrer que  $Q \mapsto N(Q)$  et  $Q \mapsto \|Q\|_K$  sont des normes sur  $\mathcal{E}_d$  et qu'elles sont équivalentes.

b) La fonction  $Q \mapsto \|Q\|_K$  est-elle continue sur l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{E}_d, \|\cdot\|_K)$ ?

5.a) Majorer  $\sup_{\substack{Q \in \mathcal{E}_d \\ Q \neq 0}} \frac{\|Q\|_K}{N(Q)}$  en fonction de  $\rho$ .

b) On choisit  $n = d+1$  points distincts dans  $K$ ,  $x_1, \dots, x_{d+1}$ , et l'on reprend les notations de la première partie. On pose  $\beta = \sup_{\substack{0 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq d+1}} |b_{i,j}|$ . En utilisant les résultats de la question 2., montrer que

$$\sup_{\substack{Q \in \mathcal{E}_d \\ Q \neq 0}} \frac{N(Q)}{\|Q\|_K} \leq \beta(d+1).$$

\*\*\*

Dans toute la suite du problème, on pose

$$m = \inf_{Q \in \mathcal{U}_d} \|Q\|_K.$$

## Troisième partie

6.a) Montrer que  $0 \leq m \leq \rho^d$ .

b) Montrer que  $\inf_{\substack{Q \in \mathcal{U}_d \\ \|Q\|_K \leq \rho^d}} \|Q\|_K = m$ .

c) Montrer qu'il existe  $Q_0 \in \mathcal{U}_d$  tel que  $\|Q_0\|_K = m$ .

## Quatrième partie

7. Soient  $k \in \mathbf{N}^*$  et  $c_k$  un nombre complexe non nul. Soit  $z_0 \in \mathbf{C}$ . On considère le polynôme

$$Q(X) = 1 + c_k(X - z_0)^k.$$

Montrer qu'il existe  $z \in \mathbf{C}$  tel que  $|Q(z)| > |Q(z_0)|$ . [On pourra considérer le module et l'argument de  $c_k$  et de  $z - z_0$ .]

8. Plus généralement, soit  $Q \in \mathcal{E}_d$  et soit  $z_0 \in \mathbf{C}$ . On suppose que  $Q(z_0) = 1$  et que  $Q$  n'est pas constant.

a) Montrer qu'il existe un entier  $k \geq 1$ , un nombre complexe  $c_k$ ,  $c_k \neq 0$ , et un polynôme  $R$  tels que

$$Q(X) = 1 + c_k(X - z_0)^k + c_k(X - z_0)^{k+1}R(X).$$

b) Montrer que, pour tout réel  $r > 0$ , il existe  $z \in \mathbf{C}$  tel que  $|z - z_0| = r$  et

$$Q(z) = 1 + |c_k| |z - z_0|^k + |c_k| |z - z_0|^k (z - z_0)R(z).$$

c) Montrer que, pour tout réel  $r > 0$ , il existe  $z \in \mathbf{C}$  tel que  $|z - z_0| \leq r$  et

$$|Q(z)| > |Q(z_0)|.$$

9.a) Montrer que la propriété démontrée à la question 8.c) est satisfaite pour tout polynôme non constant  $Q \in \mathcal{E}_d$  et pour tout point  $z_0 \in \mathbf{C}$ .

b) En déduire que, pour tout  $Q \in \mathcal{E}_d$ ,

$$\sup_{|z| \leq 1} |Q(z)| = \sup_{|z|=1} |Q(z)|.$$

c) Montrer que, pour tout  $Q \in \mathcal{E}_d$ ,

$$\sup_{|z| \geq 1} \left| \frac{Q(z)}{z^d} \right| = \sup_{|z|=1} |Q(z)|.$$

d) Dans cette question, on choisit  $K = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\}$ . Montrer que le polynôme  $Q_0(X) = X^d$  satisfait

$$\|Q_0\|_K = m.$$

## Cinquième partie

**10.** Soient  $z_0$  et  $z_1$  deux nombres complexes non nuls. Montrer que  $|z_0 + z_1| = |z_0| + |z_1|$  si et seulement s'il existe un réel  $\lambda > 0$  tel que  $z_1 = \lambda z_0$ .

Pour  $Q \in \mathcal{E}_d$ , on pose

$$\mathcal{M}(Q) = \{z \in K \mid |Q(z)| = \|Q\|_K\}.$$

**11.** On suppose qu'il existe des polynômes distincts  $Q_0 \in \mathcal{U}_d$  et  $Q_1 \in \mathcal{U}_d$  vérifiant

$$\|Q_0\|_K = \|Q_1\|_K = m.$$

Pour tout  $t \in ]0, 1[$ , on pose

$$Q_t = tQ_1 + (1-t)Q_0.$$

a) Montrer que, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\|Q_t\|_K = m$ .

b) Soit  $t \in ]0, 1[$  et soit  $z \in \mathcal{M}(Q_t)$ . Montrer que  $z \in \mathcal{M}(Q_0)$  et  $z \in \mathcal{M}(Q_1)$ , puis montrer que  $Q_0(z) = Q_1(z)$ .

c) En déduire que, pour tout  $t \in ]0, 1[$ ,  $\text{Card}(\mathcal{M}(Q_t)) < d$ .

**12.** On suppose qu'il existe  $Q \in \mathcal{U}_d$  tel que  $\|Q\|_K = m$  et tel que  $\text{Card}(\mathcal{M}(Q)) \leq d$ .

a) Montrer qu'il existe un polynôme  $L \in \mathcal{E}_{d-1}$  tel que, pour tout  $z \in \mathcal{M}(Q)$ ,  $L(z) = Q(z)$ .

b) Soit  $Q_p = Q - \frac{1}{p}L$ , pour  $p \in \mathbf{N}^*$ . Montrer que, pour chaque  $p \in \mathbf{N}^*$ , il existe  $z_p \in K$  tel que  $|Q_p(z_p)| \geq \|Q\|_K$ .

*On admettra* le résultat suivant : il existe une suite strictement croissante de nombres entiers,  $p \mapsto n_p$ , telle que la suite  $p \mapsto z_{n_p}$  converge vers un élément  $\ell$  de la partie compacte  $K$  de  $\mathbf{C}$ , quand  $p$  tend vers  $+\infty$ .

c) Montrer que  $|Q(\ell)| = \|Q\|_K$ . En déduire que  $Q(\ell) = L(\ell)$ .

d) Montrer que  $Q(z_{n_p}) = Q(\ell)(1 + \varepsilon_p)$  et  $L(z_{n_p}) = Q(\ell)(1 + \varepsilon_p)(1 + \varepsilon'_p)$ , où  $\varepsilon_p$  et  $\varepsilon'_p$  sont des suites de nombres complexes, définies pour  $p$  assez grand, telles que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \varepsilon_p = 0$  et  $|1 + \varepsilon_p| \leq 1$ , et  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \varepsilon'_p = 0$ . En déduire que, pour  $p$  assez grand,  $|Q_{n_p}(z_{n_p})| < \|Q\|_K$ .

**13.** Y a-t-il unicité du polynôme  $Q_0 \in \mathcal{U}_d$  tel que  $\|Q_0\|_K = m$  ?

\* \*  
\*