SESSION 2004 MPM1005

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

# MATHEMATIQUES 1

**Durée : 4 heures**

*Les calculatrices* ***sont interdites****.*

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

## A propos de l'hypothèse « de classe $C^1$ par morceaux » du théorème de convergence normale d'une série de Fourier...

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue par morceaux et de période $2\pi$, on associe ses coefficients de Fourier exponentiels définis, pour $n \in \mathbf{Z}$, par $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$ et ses coefficients de Fourier trigonométriques définis par :
$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(n\,t)\; dt$ (pour $n \in \mathbb{N}$) et $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(n\,t)\; dt$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$).
On pose, pour tout entier naturel $p$ et tout réel $x$ :

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)\, e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p} \left( a_n(f)\cos(n\,x) + b_n(f)\sin(n\,x) \right).$$

On rappelle le **théorème de convergence normale** :
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue de période $2\pi$ et de classe $C^1$ par morceaux, la série de Fourier de $f$ converge normalement vers la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, la fonction $f$ est limite uniforme de la suite de polynômes trigonométriques $(S_p(f))_{p\in\mathbb{N}}$.

Nous allons étudier ce qui peut se produire si on enlève à ce théorème l'hypothèse « de classe $C^1$ par morceaux ».
Une première partie démontre des résultats préliminaires.
Une deuxième partie traite d'un exemple où, sans l'hypothèse « de classe $C^1$ par morceaux », la série de Fourier peut diverger.

Une troisième partie recherche une condition plus faible pour que, sans l'hypothèse « de classe $C^1$ par morceaux », on puisse quand même assurer que la série de Fourier de $f$ converge uniformément vers la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

## I. Résultats préliminaires

**1.** Si, dans le théorème de convergence normale ci-dessus, on suppose que la fonction $f$ n'est pas continue mais seulement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ :

**a.** Rappeler le théorème de Dirichlet en précisant de quel type de convergence il s'agit.

**b.** Cette convergence pourrait-elle être uniforme sur $\mathbb{R}$ ?

**2.** On considère la fonction continue $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de période $2\pi$, paire et définie pour $x \in [0, \pi]$, par $\varphi(x) = \sqrt{x}$.

Donner l'allure de la courbe de cette fonction et expliquer pourquoi elle n'est pas de classe $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

**3. Théorème de Cesàro**

Soit $(u_n)$ une suite de complexes qui converge vers le complexe $l$.

**a.** Justifier, simplement, en utilisant un théorème de sommation de relations de comparaison, que : $\sum_{k=0}^{n}(u_k - l) = o(n+1)$ au voisinage de $+\infty$.

**b.** En déduire que la suite $\left(\dfrac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{n+1}\right)$ converge vers $l$.

**4.** Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et de période $2\pi$ dont la somme de Fourier de rang $n$ est notée $S_n(f)$. Pour $n$ entier naturel non nul, on définit la somme de Fejér de $f$ de rang $n$, notée $\sigma_n(f)$ comme la moyenne de Cesàro des sommes de Fourier :

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}(S_0(f) + S_1(f) + \ldots + S_n(f)).$$

On démontre, ***et nous l'admettrons***, le **théorème de Fejér** :

« La suite de polynômes trigonométriques $(\sigma_n(f))$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f$ ».

**Une application** :

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue et de période $2\pi$ telle que la suite $(S_n(f))$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, montrer que la suite $(S_n(f))$ converge vers la fonction $f$.

**5.** Si $(u_n)$ est une suite de réels positifs qui converge vers 0, montrer qu'il existe une suite de réels $(d_n)$ décroissante et de limite nulle telle que, pour tout entier naturel $n$, $0 \le u_n \le d_n$ (on pourra, par exemple, vérifier que la suite $\left(\sup\{u_k,\ k \ge n\}\right)_n$ convient).

## II. Un exemple de Série de Fourier divergente (en un point)

On considère la suite de fonctions $(f_n)$ définies sur l'intervalle $[0, \pi]$ pour tout entier naturel non nul $n$ par : $f_n(x) = \frac{1}{n^2}\sin\left[\left(2^{n^3}+1\right)\frac{x}{2}\right]$.

**6.** Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0, \pi]$.

On définit alors la fonction $f$ paire, continue, de période $2\pi$ sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout réel $x \in [0, \pi]$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

**7.** On pose, pour $p$ et $k$ entiers naturels, $I_{p,k} = \int_0^{\pi} \cos(p\,t)\sin\left(\frac{2k+1}{2}t\right)\mathrm{d}t$ et, pour $q$ entier naturel, $T_{q,k} = \sum_{p=0}^{q} I_{p,k}$.

**a.** Calculer, pour $p$ et $k$ entiers naturels, l'intégrale $I_{p,k}$.

**b.** Pour $q$ et $k$ entiers naturels, déterminer un réel positif $c_k$ tel que $T_{q,k} = c_k + \sum_{j=k-q}^{k+q} \frac{1}{2j+1}$ et en déduire que, pour tout couple $(q, k)$ d'entiers naturels, $T_{q,k} \geq 0$.

**c.** Déterminer, pour $N$ au voisinage de $+\infty$, un équivalent simple de $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+1}$.

**d.** En déduire que, pour $k$ au voisinage de $+\infty$, $T_{k,k} \sim \frac{1}{2}\ln k$.

**8.** Montrer que, pour $p$ entier naturel non nul, $a_p(f) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} I_{p,\,2^{n^3}-1}$.

**9.** Montrer que, pour $p$ entier naturel non nul, $S_{2^{p^3}-1}(f)(0) \geq \frac{-a_0(f)}{2} + \frac{2}{\pi\,p^2} T_{2^{p^3}-1,\,2^{p^3}-1}$

(on remarquera que : $\frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{N} a_l = \frac{-a_0}{2} + \sum_{l=0}^{N} a_l$).

Conclure que la suite $\left(S_n(f)(0)\right)$ diverge.

## III. Fonctions à variation bornée, Théorème de Jordan

Pour deux réels $a < b$ on note $S_{[a,b]}$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a, b]$.

Si $f$ est une fonction de $[a, b] \to \mathbb{C}$ et $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in S_{[a,b]}$, on note :

$$V(\sigma, f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

On dira que la fonction $f$ est à variation bornée s'il existe un réel positif $M$ tel que pour toute $\sigma \in S_{[a,b]}$, l'on ait : $V(\sigma, f) \leq M$.

On appelle alors **variation totale** de $f$ sur $[a, b]$ le réel positif noté :

$$V([a,b], f) = \sup_{\sigma \in S[a,b]} V(\sigma, f).$$

**10.** Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x \cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)$ si $x \neq 0$ est continue et n'est pas à variation bornée sur $[0, 1]$.
(on pourra choisir $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ subdivision de $[0, 1]$ : $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$ et
$\forall k \in \{1, ..., n\}$, $x_k = \dfrac{1}{2(n+1-k)}$).

**11.** Exemples généraux

**a.** Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui est monotone est à variation bornée sur $[a, b]$ et préciser $V([a, b], f)$.

**b.** Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui est somme de deux fonctions monotones est à variation bornée sur $[a, b]$.

**c.** Montrer qu'une fonction $[a, b] \to \mathbb{C}$ qui est continue et de classe $C^1$ par morceaux est à variation bornée.

**12.** Soit une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ à variation bornée sur $[a, b]$ et soit $a < c < b$.
Montrer que chacune des restrictions de $f$ aux intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$ est à variation bornée et que : $V([a, c], f) + V([c, b], f) \leq V([a, b], f)$.
*Remarque* : on peut même montrer qu'il y a égalité mais ce ne sera pas utile pour ce problème.

**13.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et de période $2\pi$ telle que la restriction de $f$ à l'intervalle $[0, 2\pi]$ soit à variation bornée.
Pour $n$ entier relatif et $N$ entier naturel, tous deux non nuls, on utilisera la subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq |n|N}$ de $[0, 2\pi]$ définie, pour $k$ entier compris entre 0 et $|n|N$, par : $x_k = \dfrac{2\pi k}{|n|N}$.
Pour $k$ entier compris entre 1 et $|n|N$, on notera $V_k(f)$ la variation totale de $f$ sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$.

**a.** Vérifier que : $\left| \displaystyle\sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \big(f(t) - f(x_k)\big) e^{-int} \mathrm{d}t \right| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k - x_{k-1})$.

**b.** Montrer que : $\left| \displaystyle\sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) e^{-int} dt \right| \leq \dfrac{1}{|n|} V([0, 2\pi], f)$.

**c.** En déduire que pour tout entier $n$ non nul, $\left|c_n(f)\right| \leq \dfrac{V([0,2\pi]\ ,f)}{2|n|\pi}$.

**14.** Soit $(u_n)$ une suite de complexes, on pose, pour tout entier naturel $n$,

$S_n = \sum_{j=0}^{n} u_j$ et $\sigma_n = \dfrac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1}$.

On suppose que la suite $(\sigma_n)$ converge vers un complexe $L$ et on suppose qu'il existe une constante réelle $A$ non nulle telle que, pour tout entier naturel $k$, $|u_k| \leq \dfrac{A}{k+1}$.

**a.** Pour $n$ et $k$ entiers naturels non nuls, exprimer, à l'aide des termes de la suite $(u_i)$, l'expression : $k\,(S_n - L) - (n+k)(\sigma_{n+k-1} - L) + n(\sigma_{n-1} - L)$.

**b.** Soit une suite de réels $(d_n)$ décroissante et de limite nulle telle que, pour tout entier naturel $n$, $|\sigma_n - L| \leq d_n$, montrer que, pour $n$ et $k$ entiers naturels non nuls :

$|S_n - L| \leq \left(1 + \dfrac{2n}{k}\right) d_{n-1} + A\dfrac{k-1}{2(n+2)}$.

**c.** L'entier naturel non nul $n$ étant donné, on choisit $k$ tel que $(k-1)^2 \leq 4n^2 d_{n-1} < k^2$

($k-1$ est donc la partie entière de $2n\sqrt{d_{n-1}}$).

Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a : $|S_n - L| \leq d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}}$. Que peut-on en déduire ?

**15.** Montrer que la série de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et de période $2\pi$ telle que la restriction de $f$ à l'intervalle $[0, 2\,\pi]$ soit à variation bornée converge uniformément vers la fonction $f$.

**16.** Montrer que la série de Fourier de la fonction $\varphi$ de la question **2**. converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\varphi$ .

**17.** *Application*

Montrer que la série de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, de période $2\pi$ et lipschitzienne converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f$.

**Fin de l'énoncé**