ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE
Filière PSI

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
(L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2-Filière PSI.
Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Première partie

Soit **M** l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre 3. Soit **C** le produit cartésien $\mathbf{M} \times \mathbf{M}$. Il est admis que cet ensemble est un espace vectoriel réel à l'aide de la loi interne, addition, et de la loi externe, multiplication par un réel, définies par les relations suivantes :

La somme de deux éléments de **C**, (P, Q) et (R, S) est l'élément $(P+R, Q+S)$:

$$(P, Q) + (R, S) = (P+R, Q+S).$$

Le produit d'un réel λ et de l'élément (P, Q) est l'élément $(\lambda P, \lambda Q)$ de **C** :

$$\lambda(P, Q) = (\lambda P, \lambda Q).$$

En plus de ces lois de composion, soit $*$ la loi de composition interne, appelée produit, qui, aux deux éléments de **C**, (P, Q) et (R, S) fait correspondre l'élément de **C**, $(P.R, P.S+Q.R)$, ($P.R$, $P.S$ et $Q.R$ sont respectivement les produits des matrices P, R, P, S et Q, R).

$$(P, Q) * (R, S) = (P.R, P.S+Q.R).$$

L'algèbre $(\mathbf{C}, +, ., *)$:

1. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel **C** ?

2. Démontrer que l'espace **C** est une $\mathbb{R}$-algèbre associative unitaire. L'élément unité de cette algèbre est noté $\boldsymbol{e}$.

Étant donné l'élément $(P,\ Q)$ de **C**, soit ${}^t(P,\ Q)$ l'élément de **C** défini à l'aide des matrices transposées ${}^tP$ et ${}^tQ$ des matrices P et Q de la façon suivante :

$${}^t(P,\ Q) = ({}^tP,\ {}^tQ).$$

Soit **G** le sous-ensemble des éléments $(P,\ Q)$ de **C** tels que :
- la matrice P est orthogonale directe : son déterminant est égal à 1.
- les matrices P et Q vérifient la relation : ${}^tP.Q + {}^tQ.P = 0$

$$\mathbf{G} = \{(P,\ Q)\ \mid\ (P,\ Q) \in \mathbf{C},\ P \in SO(\mathbb{R}^3),\ {}^tP.Q + {}^tQ.P = 0\}.$$

Le groupe G :

3. Démontrer que le sous-ensemble **G** de **C** est, pour la loi produit $*$, un groupe.

4. Soit **H** le sous-ensemble des éléments $(P, 0)$ du groupe **G**. Démontrer que **H** est un sous-groupe de **G** isomorphe au groupe $SO(\mathbb{R}^3)$.

5. Soit **A** le sous-ensemble des éléments $(I_3,\ Q)$ de **G** (I_3 est la matrice unité).

$$\mathbf{A} = \{(I_3,\ Q)\ \mid\ (I_3,\ Q) \in \mathbf{G}\}.$$

Est-ce que **A** est un sous-groupe de **G** ?

6. Démontrer que, pour qu'un élément $(P,\ Q)$ de **C** appartienne à **G**, il faut et il suffit que le déterminant de la matrice P soit égal à 1 et que la relation ${}^t(P,\ Q) * (P,\ Q) = e$ ait lieu :

$$(P,\ Q) \in \mathbf{G} \Leftrightarrow {}^t(P,\ Q) * (P,\ Q) = e,\ \det P = 1.$$

Seconde partie

Le but de cette partie est de montrer qu'il existe un isomorphisme entre le groupe des déplacements de l'espace de la géométrie affine euclidienne et le groupe **G** étudié ci-dessus.

Dans toute la suite, $\mathbf{E}_3$ est un espace vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $B = (\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ est noté $\vec{x}.\vec{y}$.

Un résultat préliminaire :

7. Soit $\vec{a}$ un vecteur de $\mathbf{E}_3$; soit $p_{\vec{a}}$ l'endomorphisme de $\mathbf{E}_3$ dans lui-même qui, au vecteur $\vec{x}$, associe le produit vectoriel des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{x}$: $\vec{x} \mapsto \vec{a} \wedge \vec{x}$. Quelle est la matrice $P_{\vec{a}}$ associée à l'application $p_{\vec{a}}$ dans la base B de $\mathbf{E}_3$?

8. Soit r une rotation de $\mathbf{E}_3$ dans lui-même ; comparer pour deux vecteurs quelconques $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de $\mathbf{E}_3$ les expressions suivantes :

$$r(\vec{x} \wedge \vec{y}),\quad r(\vec{x}) \wedge r(\vec{y}).$$

9. Démontrer que, si r est une rotation de $\mathbf{E}_3$ et $\vec{a}$ un vecteur de $\mathbf{E}_3$, il existe un vecteur $\vec{b}$ de $\mathbf{E}_3$ tel que l'endomorphisme $r \circ p_{\vec{a}}$, composé de $p_{\vec{a}}$ et de r, est égal à l'endomorphisme $p_{\vec{b}} \circ r$, composé de r et de $p_{\vec{b}}$:

$$r \circ p_{\vec{a}} = p_{\vec{b}} \circ r\,;$$

exprimer ce vecteur $\vec{b}$ en fonction du vecteur $\vec{a}$ et de la rotation r.

Dans toute la suite, soit **E** l'espace de la géométrie affine euclidienne orientée ; **E** est supposé être un espace affine de direction un espace vectoriel euclidien orienté $\mathbf{E}_3$. Soit O une origine et $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ trois vecteurs orthonormés constituant avec le point O un repère $Oxyz$ direct.

Détermination d'une droite à l'aide de deux vecteurs et d'un repère :

L'espace **E** est muni d'un repère orthonormé direct $Oxyz$; soit D une droite de l'espace affine **E**, A un point de cette droite et $\vec{u}$ un vecteur directeur unitaire de cette droite.

10. Soit M un point quelconque de la droite D. Démontrer que le vecteur $\vec{v}$, égal au produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{u}$, est indépendant du point M de la droite D :

$$\vec{v} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}.$$

Comparer les directions des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

11. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace $\mathbf{E}_3$ tels que le vecteur $\vec{u}$ soit unitaire $\left(\|\vec{u}\| = 1\right)$ et $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ $\left(\vec{u}.\vec{v} = 0\right)$. Déterminer, à l'aide des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$, les vecteurs $\vec{x}$ de $\mathbf{E}_3$, solutions de l'équation suivante :

$$\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}.$$

12. Étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace $\mathbf{E}_3$ tels que le vecteur $\vec{u}$ soit unitaire $\left(\|\vec{u}\| = 1\right)$ et $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ $\left(\vec{u}.\vec{v} = 0\right)$, démontrer qu'il existe une seule droite D de l'espace **E** telle qu'un vecteur directeur unitaire de la droite D soit le vecteur $\vec{u}$ et que tout point M de D vérifie la relation suivante :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u} = \vec{v}.$$

13. Exemple : les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont définis, dans le repère $Oxyz$, par les relations suivantes :

$$\vec{u} = \vec{i} \quad ; \quad \vec{v} = b\,\vec{j} + c\,\vec{k},$$

où b et c sont deux réels donnés. Déterminer la droite D correspondante.

Soit **P** le sous-ensemble de $\mathbf{E}_3 \times \mathbf{E}_3$ des couples de deux vecteurs $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ tels que le premier vecteur $\vec{u}$ soit unitaire et le second $\vec{v}$ soit perpendiculaire à $\vec{u}$.

14. À quelle condition nécessaire et suffisante deux couples de vecteurs $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ et $\left(\vec{u}', \vec{v}'\right)$, appartenant à **P**, déterminent la même droite D ?

Soit d un déplacement de l'espace **E** muni du repère orthonormé direct $Oxyz$; par définition, il est égal à l'application composée d'une rotation r de l'espace $\mathbf{E}_3$ et d'une translation de vecteur $\vec{a}$ de $\mathbf{E}_3$; soit M' l'image par ce déplacement d d'un point M ; le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ est relié au vecteur $\overrightarrow{OM}$ par la relation suivante :

$$\overrightarrow{OM'} = \vec{a} + r\left(\overrightarrow{OM}\right).$$

Isomorphisme entre le groupe des déplacements de l'espace E et le groupe G :

Soient d un déplacement, D une droite quelconque de l'espace $\mathbf{E}$ et D' l'image de la droite D par le déplacement d :

$$D' = d(D).$$

15. Aux deux droites D et D' de l'espace $\mathbf{E}$, muni du repère orthonormé direct $Oxyz$, sont associés d'après la question 14 des couples de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$; démontrer que, le couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ étant fixé, il est possible de choisir le couple de vecteurs $(\vec{u}', \vec{v}')$ de façon que les vecteurs $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ s'expriment au moyen des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par les relations suivantes :

$$\vec{u}' = \alpha(\vec{u}), \quad \vec{v}' = \alpha(\vec{v}) + \beta(\vec{u}),$$

où α et β sont deux endomorphismes de $\mathbf{E}_3$ tels que le déterminant de α soit strictement positif ($\det\alpha > 0$).

16. Au déplacement d est donc associé le couple des deux endomorphismes α et β. Soient A et B les matrices associées aux endomorphismes α et β dans une base orthonormée directe de $\mathbf{E}_3$. Démontrer que le couple de matrices (A, B) appartient au groupe $\mathbf{G}$.

17. Démontrer que l'application qui, au déplacement d de $\mathbf{E}$ associe l'élément (A, B) du groupe $\mathbf{G}$, est injective.

18. Exemple : soit D la droite du plan xOy d'équation $y = y_0$ (y_0 est un réel différent de zéro donné) ; soit D' son image par le déplacement égal à la rotation d'axe Oz et d'angle θ suivie de la translation de vecteur $\vec{j} + \vec{k}$. Déterminer les endomorphismes α et β associés à ce déplacement et les couples de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ associés respectivement aux droites D et D'. Vérifier dans ce cas particulier la relation obtenue à la question 15.

19. Démontrer que l'application J qui, à un déplacement d de l'espace $\mathbf{E}$ associe le couple de matrices (A, B) du groupe $\mathbf{G}$ est bijective.

Droite invariante dans un déplacement :

20. Soit d un déplacement, distinct de l'application identique ; à ce déplacement est associé un couple de matrices (A, B) appartenant à $\mathbf{G}$. Rechercher l'existence d'une droite invariante par le déplacement d en considérant le couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ associé à cette droite. Écrire les relations vérifiées par ces vecteurs inconnus $\vec{u}$, $\vec{v}$. Quelle conclusion y a-t-il lieu d'en tirer sur le vecteur $\vec{u}$?

21. Déterminer la droite invariante dans l'exemple de la question 18.

FIN DU PROBLÈME