*Concours Centrale - Supélec 2003*

**Épreuve : MATHÉMATIQUES II** **Filière PSI**

Dans tout le problème, $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à $1$.

On considère un espace euclidien $E$ de dimension $n$. On note $(x|y)$ le produit scalaire de deux vecteurs $x$ et $y$ et $x \mapsto \|x\|$ la norme associée.

Pour $u \in L(E)$, on note $u^*$ son adjoint, $\chi_u$ son polynôme caractéristique et $Sp(u)$ l'ensemble de ses valeurs propres. On note $\pi_u$ le générateur de l'idéal des polynômes annulateurs de $u$ dont le coefficient de plus haut degré est égal à $1$. $\pi_u$ est appelé polynôme minimal de $u$.

L'endomorphisme $u$ de $E$ est dit antisymétrique lorsque $u^* = -u$.

On note, $S(E)$, $A(E)$ et $O(E)$ les sous-ensembles de $L(E)$ formés respectivement des endomorphismes symétriques, antisymétriques, orthogonaux.

Si $F$ est un sous-espace de $E$ stable par $u$, on note $u|_F$ l'endomorphisme de $F$ induit par $u$.

On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des endomorphismes $u$ de $E$ tels que $u^*$ soit un polynôme en $u$ et $\mathscr{N}(E)$ l'ensemble des endomorphismes $u$ de $E$ qui commutent avec leur adjoint, donc :

$$\mathscr{P}(E) = \{u \in L(E) \ / \ u^* \in \mathbb{R}[u]\}, \ \mathscr{N}(E) = \{u \in L(E) \ / \ (u^* \circ u = u \circ u^*)\}.$$

*Le but du problème est d'étudier et comparer les deux ensembles $\mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{N}(E)$.*

On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille $n$ et $S_n$, $A_n$ et $O_n$ les sous-ensembles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ formés respectivement des matrices symétriques, antisymétriques, orthogonales.

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\chi_A$ son polynôme caractéristique et $\pi_A$ son polynôme minimal, c'est-à-dire le polynôme minimal de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $A$. On note ${}^tA$ la transposée de $A$.

Deux matrices $A$ et $B$ sont dites orthogonalement semblables lorsqu'il existe $P \in O_n$ tel que $B = P^{-1}AP$.

On note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des matrices $A$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tA$ peut s'exprimer comme un polynôme en $A$, donc :

$$\mathscr{P}_n = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ {}^tA \in \mathbb{R}[A]\}, \text{ et de manière analogue :}$$

$$\mathscr{N}_n = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ {}^tAA = A{}^tA\}$$

Les parties I et II sont indépendantes.

## Partie I - Généralités sur $\mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{P}_n$

**I.A -**

I.A.1) Soient $A$ et $B$ les deux matrices d'un même endomorphisme de $E$ rapporté à deux bases orthonormales. Montrer que $A$ et $B$ sont orthogonalement semblables.

I.A.2) Soit $u$ un endomorphisme de $E$ et $A$ sa matrice sur $\mathscr{B}$, une base orthonormale de $E$. Établir un rapport entre l'appartenance de $u$ à $\mathscr{P}(E)$ (resp. $\mathscr{N}(E)$) et l'appartenance de $A$ à $\mathscr{P}_n$ (resp. $\mathscr{N}_n$).

Dans la suite du problème, on pourra exploiter ce rapport pour répondre à certaines questions.

I.A.3) Montrer que $\mathscr{P}(E) \subset \mathscr{N}(E)$ et que $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{N}_n$.

**I.B -**

I.B.1) Vérifier que $S(E) \subset \mathscr{P}(E)$ et $A(E) \subset \mathscr{P}(E)$.

I.B.2) Quelles sont les matrices triangulaires supérieures qui appartiennent à $\mathscr{P}_n$ ?

En déduire que si $n \geq 2$, on a $\mathscr{P}(E) \neq L(E)$.

I.B.3) Soit $u \in L(E)$ admettant, sur une certaine base $\mathscr{B}$ de $E$, une matrice triangulaire supérieure. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathscr{B}'$ de $E$, telle que les matrices de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$ soient triangulaires supérieures.

Montrer que la matrice de $u$ dans $\mathscr{B}'$ est triangulaire supérieure.

En déduire les éléments $u \in \mathscr{P}(E)$ qui sont trigonalisables.

I.B.4) On suppose que $u$ est un automorphisme de $E$ ; montrer que $u$ admet un polynôme annulateur $P$ tel que $P(0) \neq 0$. En déduire que $u^{-1}$ peut s'écrire comme un polynôme en $u$.

En déduire que $O(E) \subset \mathscr{P}(E)$.

**I.C -**

I.C.1) Montrer que si $A \in \mathscr{P}_n$ et $A \neq 0$, alors il existe un unique polynôme réel que l'on note $P_A$, tel que degré $(P_A) <$ degré$(\pi_A)$ et $P_A(A) = {}^tA$.

Si $A$ est la matrice nulle, on convient que $P_A$ est le polynôme nul.

Énoncer le résultat correspondant pour $u \in \mathscr{P}(E)$.

I.C.2) Déterminer les matrices $A$ de $\mathscr{P}_n$ pour lesquelles $P_A$ est un polynôme constant.

I.C.3) Déterminer les matrices $A$ de $\mathscr{P}_n$ pour lesquelles $P_A$ est du premier degré. On rappelle que toute matrice carrée s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

I.C.4) Soient $A$ et $B$ deux matrices orthogonalement semblables.

Montrer que si $A \in \mathscr{P}_n$ alors $B \in \mathscr{P}_n$ et $P_A = P_B$.

**I.D -** Décrire les éléments $A$ de $\mathscr{P}_2$ et calculer les $P_A$ correspondants.

**I.E -** Soit

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \text{ avec } A_1 \in \mathscr{P}_{n_1},\ A_2 \in \mathscr{P}_{n_2}.$$

I.E.1) On suppose que $\pi_{A_1}$ et $\pi_{A_2}$ sont premiers entre eux. Montrer l'existence de deux polynômes $U$ et $V$ tels que :

$$P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})U\,\pi_{A_1} = P_{A_2} + (P_{A_1} - P_{A_2})V\,\pi_{A_2}.$$

Calculer $A^m$ pour $m$ entier positif quelconque, puis $P(A)$ pour $P = P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})U\pi_{A_1}$.

En déduire que $A \in \mathscr{P}_{n_1+n_2}$.

I.E.2) Expliciter $\pi_A$ en fonction de $\pi_{A_1}$ et $\pi_{A_2}$.

Comment trouver $P_A$ connaissant $\pi_{A_1}$, $\pi_{A_2}$, et le polynôme $P$ défini par :

$$P = P_{A_1} - (P_{A_1} - P_{A_2})U\pi_{A_1}\ ?$$

**I.F -** Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vérifier que $A \in \mathscr{P}_4$ et calculer $P_A$ avec la méthode précédente.

## *Partie II - Étude de $\mathscr{N}(E)$ et $\mathscr{N}_n$*

**II.A -** Montrer que si $u \in \mathscr{N}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(u) \in \mathscr{N}(E)$.

**II.B -** Soient $u \in \mathscr{N}(E)$ et $x \in E$. Montrer que $\|u(x)\|^2 = \|u^*(x)\|^2$. En déduire que $u$ et $u^*$ ont le même noyau.

**II.C -** Soit $m$ un entier, $m > 0$. On suppose donné un endomorphisme $f$ antisymétrique inversible de l'espace $\mathbb{R}^m$ muni de son produit scalaire canonique.

II.C.1) Comparer les déterminants de $f$ et $f^*$. En déduire que $m$ est pair.

II.C.2) On considère les applications $n$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}^m$ par $n(x) = \|x\|^2$ et $g(x) = \|f(x)\|^2$ et l'application

$$q : U = \mathbb{R}^m \setminus\{0\} \mapsto \mathbb{R} \text{ définie par } q(x) = \frac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2}.$$

Montrer que $n$ et $g$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^m$ et que leurs différentielles en $x$ fixé sont les formes linéaires

$$h \mapsto 2(x|h) \text{ et } h \mapsto 2(f(x)|f(h)).$$

Montrer que l'application $q$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^m \setminus\{0\}$ et déterminer sa différentielle en $x$, en calculant $dq(x)(h)$ au moyen de produits scalaires et de normes.

On note $S = \{x \in U / \|x\| = 1\}$.

Montrer que l'ensemble des valeurs prises par $q$ sur $S$ coïncide avec l'ensemble des valeurs prises par $q$ sur $U$. Montrer que la fonction $q$ admet un maximum sur $\mathbb{R}^m \setminus\{0\}$ et que ce maximum est atteint en un point $x_0 \in S$.

Montrer que, pour tout $h$, on a $(f(x_0)|f(h)) = \|f(x_0)\|^2 \ (x_0|h)$. En déduire que $\Pi = \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0))$ est un plan stable par $f$.

Donner une base orthonormale de $\Pi$ et exprimer la matrice de $f|_{\Pi}$ relative à cette base.

II.C.3) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^m$ telle que :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau_{\frac{m}{2}} \end{bmatrix} \text{ avec } \tau_i = \begin{bmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{bmatrix} \text{ et } b_i \neq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, \frac{m}{2}.$$

**II.D -** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $E_1 \subset E$ un sous-espace stable par $u$ et $u^*$. On note $E_2$ le supplémentaire orthogonal de $E_1$.

II.D.1) Montrer que $E_2$ est stable par $u$ et $u^*$.

II.D.2) Montrer que $(u|_{E_1})^* = u^*|_{E_1}$.

II.D.3) Montrer que si, en outre, $u \in \mathcal{N}(E)$, alors $u|_{E_1} \in \mathcal{N}(E_1)$ et $u|_{E_2} \in \mathcal{N}(E_2)$.

*Jusqu'à la fin de la partie II, $u$ désigne un élément de $\mathcal{N}(E)$.*

**II.E -** Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$ ; montrer que $\|u(x) - \lambda x\|^2 = \|u^*(x) - \lambda x\|^2$. En déduire que $u$ et $u^*$ ont les mêmes sous-espaces propres et que ceux-ci sont en somme directe orthogonale.

Si $\lambda$ est une valeur propre de $u$, on note $E_u(\lambda)$ le sous-espace propre associé. Soit $F$ le supplémentaire orthogonal du sous-espace :

$$\bigoplus_{\lambda} E_u(\lambda)\text{, où la somme porte sur l'ensemble des valeurs propres de } u.$$

Montrer que $F$ est stable par $u$ et $u^*$. En considérant la restriction de $u$ à $F$, montrer que la dimension de $F$ ne peut être impaire. On notera $\dim F = 2p$.

**II.F -** On suppose que $p$ est non nul. Soit $v \in \mathcal{N}(F)$. On pose

$$s = \frac{v + v^*}{2} \text{ et } a = \frac{v - v^*}{2}.$$

II.F.1) Justifier que le polynôme caractéristique de $s$ est scindé.On le note :

$$\chi_s(X) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda_i - X)^{n_i}.$$

II.F.2) Montrer que $s \circ a = a \circ s$ et $s \circ v = v \circ s$.

Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de $F$ telle que la matrice de $v$ dans $\mathcal{B}'$ soit diagonale par blocs :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_k \end{bmatrix}$$

avec, pour $i = 1, \dots, k$, $M_i$ de la forme $\lambda_i I_{n_i} + A_i$ où $A_i$ est antisymétrique.

II.F.3) On suppose en outre que $v$ n'admet aucune valeur propre réelle. Montrer que les $A_i$ sont inversibles.

**II.G -** Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $E$ telle que :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau_p \end{bmatrix} \text{ avec } D \text{ matrice diagonale, } \tau_i = \begin{bmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{bmatrix} \text{ et } b_i \neq 0$$

pour $i = 1, \dots, p$.

**II.H -** Donner une caractérisation des matrices $A \in \mathcal{N}_n$.

**II.I -** Préciser la matrice obtenue dans II.G quand $u \in O(E)$.

## Partie III - Relation entre $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{N}_n$

**III.A -** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

III.A.1) Soit

$$\Delta = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_k \end{bmatrix}$$ une matrice réelle diagonale par blocs.

Montrer que $P(\Delta) = {}^t\Delta$ si et seulement $P(M_i) = {}^tM_i$, pour $i = 1, \dots, k$.

III.A.2) Donner les expressions de $P_A$, $\chi_A$ et $\pi_A$ pour une matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ où } b \neq 0.$$

Montrer que $P(A) = {}^tA$ si et seulement si $P(a+ib) = a-ib$ et $P(a-ib) = a+ib$.

Dans les questions qui suivent, on fixe $A \in \mathscr{N}_n$. D'après II.H, $A$ est orthogonalement semblable à une matrice $B$ telle que celle représentée dans II.G.

III.A.3) Montrer que $P(A) = {}^tA$ si et seulement si :

$$\begin{cases} P(\lambda) = \lambda \text{ pour toute valeur propre réelle } \lambda \text{ de } A \\ P(z) = \bar{z} \text{ pour toute racine complexe non réelle } z \text{ de } \chi_A \end{cases}.$$

III.A.4) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré minimal, vérifiant les conditions ci-dessus (sur $P(\lambda)$ et $P(z)$) et que ce polynôme est, en fait, à coefficients réels.

En déduire que $\mathscr{N}_n = \mathscr{P}_n$.

**III.B -** Montrer que le polynôme $P$ trouvé dans III.A.4 est, en fait, $P_A$.

Retrouver, avec la méthode précédente, le polynôme $P_A$ de la question I.F.

**III.C -** Dans cette question, on suppose $n \geq 3$ et on note $C(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice circulante

$$C(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \ddots & \ddots & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_0 \end{bmatrix} \text{ et } J = C(0, 1, 0, \dots, 0).$$

III.C.1) Montrer que $J \in \mathscr{P}_n$.

En déduire que toute matrice circulante appartient à $\mathscr{P}_n$.

III.C.2) À toute matrice circulante non nulle $A = C(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$, on associe les polynômes

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i \text{ et } Q(X) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i X^{n-i}.$$

Donner l'expression de $\pi_J$. Comparer $Q$ et le reste de la division euclidienne de $P_A \circ P$ par $\pi_J$.

En déduire les étapes d'une méthode de calcul de $P_A$. Détailler le calcul pour $A = C(1, 1, 0)$.

**III.D -** Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ avec $a_2 \neq 0$.

Montrer qu'il existe un entier $n \geq 3$ et une matrice $A \in \mathscr{P}_n$ telle que $P = P_A$ si et seulement si $(a_1 - 1)^2 - 4a_0 a_2 \in [0, 4[$.

*Indication :* montrer que, si $n$ et $A$ existent, $\chi_A$ admet au moins une racine réelle et exactement deux racines complexes, conjuguées l'une de l'autre.

**••• FIN •••**