SESSION 2003 PCP1006

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

PHYSIQUE 1

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices est autorisée. Les deux problèmes sont indépendants

Une feuille de papier millimétré devra être distribuée avec le sujet.

***

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

***

PROBLEME I - L'AIR HUMIDE : CLIMATISATION ET FORMATION DES NUAGES

L'air qui nous entoure est humide : c'est un mélange d'air sec et de vapeur d'eau. Les caractéristiques de l'air humide sont liées aux proportions de chacun des deux constituants.
Sauf indication particulière, on considère, dans tout le problème, de l'air humide à la pression atmosphérique $P = 1,013 \cdot 10^5$ Pa.
Pour les applications numériques, on se référera, si nécessaire, aux données et au tableau figurant à la fin de l'énoncé.
On supposera dans tout le problème que l'air sec et la vapeur d'eau se comportent comme des gaz parfaits.

I. Grandeurs caractéristiques et propriétés de l'air humide

Soient M_a la masse molaire de l'air sec et M_v la masse molaire de l'eau pure. Soient P_a la pression partielle de l'air sec contenu dans un volume V d'air humide à la température T et P_v la pression partielle de la vapeur d'eau du même volume à la même température.

I.1. Justifier que $P = P_a + P_v$

I.2. Soit m_a la masse d'air sec contenue dans le volume V d'air humide à la température T. On peut alors écrire : $P_a V = m_a R_a T$.
Exprimer R_a en fonction de R et M_a. Application numérique.
Soit m_v la masse de vapeur d'eau contenue dans le volume V d'air humide à la température T. On peut alors écrire : $P_v V = m_v R_v T$.
Exprimer R_v en fonction de R et M_v. Application numérique.

I.3. L'humidité spécifique ω de l'air humide, à la température T, est le rapport de la masse de vapeur d'eau contenue dans un volume V d'air humide à la masse d'air sec contenue dans ce même volume. Elle est donnée en kilogramme d'eau par kilogramme d'air sec.

Montrer que l'humidité spécifique s'exprime sous la forme : $\omega = A \dfrac{P_v}{P - P_v}$.

En déduire l'expression de la constante A et la calculer numériquement.

I.4. La sensation d'un individu de se trouver dans un air plus ou moins humide est directement liée à l'humidité relative ou degré hygrométrique ε défini par : $\varepsilon = \dfrac{P_v}{P_{vsat}}$ avec P_{vsat} la pression de vapeur saturante de l'eau à la température T de l'air humide.
Soit 1 m^3 d'air humide, à θ = 15°C, dont le degré hygrométrique est égal à 0,85.
Calculer numériquement les masses m_a d'air sec et m_v de vapeur d'eau du mélange.

I.5. Un air humide tel que $\varepsilon = 1$, ne peut plus accepter d'eau sous forme vapeur. L'eau supplémentaire renfermée dans l'air humide se présente alors sous forme de gouttelettes d'eau suffisamment fines pour rester en suspension et formant ainsi un brouillard.
Tracer, de façon précise sur papier millimétré, la courbe représentative de l'air humide saturé dans le graphe $\omega = f(\theta)$, appelé diagramme de Carrier.
Sur le graphe précédent, indiquer en le justifiant où se trouve la zone de brouillard.

I.6. La température de rosée T_r est la température de l'air humide saturé en humidité. Elle peut être mesurée par un hygromètre à condensation : on place dans l'air humide une petite surface dont on fait varier la température jusqu'à apparition sur celle-ci, de condensat (rosée ou buée) : la température de la surface est alors celle du point de rosée.
Calculer le degré hygrométrique d'un air humide à θ = 30°C dont la température de rosée est égale à 10°C.

I.7. L'enthalpie de l'air humide tient compte de l'enthalpie de ses constituants définie sur la base des conventions suivantes :

- l'origine de l'enthalpie de l'air sec est prise à 0°C ;
- pour l'eau, l'enthalpie de référence est celle de l'eau liquide à 0°C.

Soient c_{pa} et c_{pv} les capacités thermiques massiques respectives de l'air sec et de la vapeur d'eau. Soit l la chaleur latente massique de vaporisation de l'eau.
Donner, en fonction de m_a, m_v, c_{pa}, c_{pv}, l, et θ la température en degrés Celsius de l'air humide, l'expression de l'enthalpie massique h de l'air humide.
Donner, en fonction de ω, c_{pa}, c_{pv}, l et θ, l'expression de l'enthalpie spécifique H^* de l'air humide contenant un kilogramme d'air sec.

II. Conditionnement d'air – formation des nuages

Les techniques de climatisation et de conditionnement d'air ont pour objet l'amélioration des conditions de confort. Elles reposent sur des opérations telles que mélange, échauffement, refroidissement ou humidification de l'air humide.
Les opérations de mélange d'airs humides sont également à l'origine de phénomènes météorologiques. En bord de mer, la rencontre de l'air frais et sec provenant de l'intérieur des terres avec de l'air marin fortement humide, produit les brouillards côtiers. D'autre part, l'air humide étant plus léger que l'air sec, il entre, dans son mouvement ascendant, en contact avec de l'air plus froid en altitude : c'est ainsi que se forment les nuages.

II.1. Un réchauffeur apporte, par transfert thermique à pression constante, une quantité d'énergie Q à un kilogramme d'air humide, à la température initiale θ, d'humidité spécifique initiale ω, contenant une masse m_a d'air sec.
Exprimer analytiquement (en fonction des paramètres du problème) ω_q l'humidité spécifique et θ_q la température de l'air humide obtenu.
Décrire qualitativement mais en le justifiant comment évolue, au cours de l'opération de chauffage, le degré hygrométrique de l'air humide.

II.2. Une installation de climatisation industrielle assure le réchauffage isobare d'un débit massique de 12.10^3 kg.h^{-1} d'un air humide entrant à $\theta = 15$°C avec un degré hygrométrique $\varepsilon = 0,85$. La température de sortie de l'air est égale à 45°C.
Quelle est la puissance du réchauffeur ?

II.3. On mélange deux airs humides de température θ_1 et θ_2 d'humidités spécifiques ω_1 et ω_2 contenant respectivement les masses d'air sec m_{a1} et m_{a2}.
Etablir, en les justifiant, les relations permettant de calculer, en fonction de ω_1, ω_2, m_{a1}, m_{a2} et des enthalpies spécifiques H_1^* et H_2^* des constituants, l'humidité spécifique ω_3 et l'enthalpie spécifique H_3^* du mélange.

II.4. On mélange un kilogramme d'air humide dans l'état 1 ($\theta_1 = 35$°C, $\omega_1 = 0,035$ kg d'eau/kg d'air sec), à un kilogramme d'air humide dans l'état 2 ($\theta_2 = 25$°C, $\omega_2 = 0,0039$ kg d'eau/kg d'air sec).
Calculer numériquement l'humidité spécifique ω_3 et la température θ_3 du mélange.

II.5. On mélange maintenant une quantité d'air humide dans l'état 4 ($\theta_4 = 40$°C, $\varepsilon_4 = 1$) à une quantité d'air humide dans l'état 5 ($\theta_5 = 5$°C, $\varepsilon_5 = 0,2$) contenant également toutes les deux, un kilogramme d'air sec.
Calculer numériquement l'humidité spécifique ω_6 et la température θ_6 du mélange.
Placer le point obtenu sur le graphe $\omega = f(\theta)$ tracé en I.5. Conclusion.

II.6. Un thermomètre placé dans le mélange obtenu à la question II.5. indique une température supérieure de 3°C à celle déterminée en II.5.
Quelle est la raison de cet écart entre la température calculée et la température mesurée ?
A l'aide du graphe $\omega = f(\theta)$ tracé en I.5, en déduire la masse m_e d'eau liquide présente dans le mélange.

Constante des gaz parfaits : $R = 8,32$ J.mol^{-1}.K^{-1}.
Masse molaire de l'air sec : $M_a = 29$ g.mol^{-1}.
Masse molaire de l'eau pure $M_v = 18$ g.mol^{-1}.

<u>Pression de vapeur saturante de l'eau en fonction de la température :</u>

θ(°C)	0	5	10	15	20	25	30	40	45
P_{vsat} (Pa)	610	880	1227	1706	2337	3173	4247	7377	9715

<u>Capacité thermique de l'air sec</u> $c_{pa} = 1006$ J.kg^{-1}.K^{-1}.
<u>Capacité thermique de la vapeur d'eau</u> $c_{pv} = 1923$ J.kg^{-1}.K^{-1} (supposée indépendante de la température).
<u>Chaleur latente de vaporisation de l'eau</u> $l = 2500$ kJ.kg^{-1}.

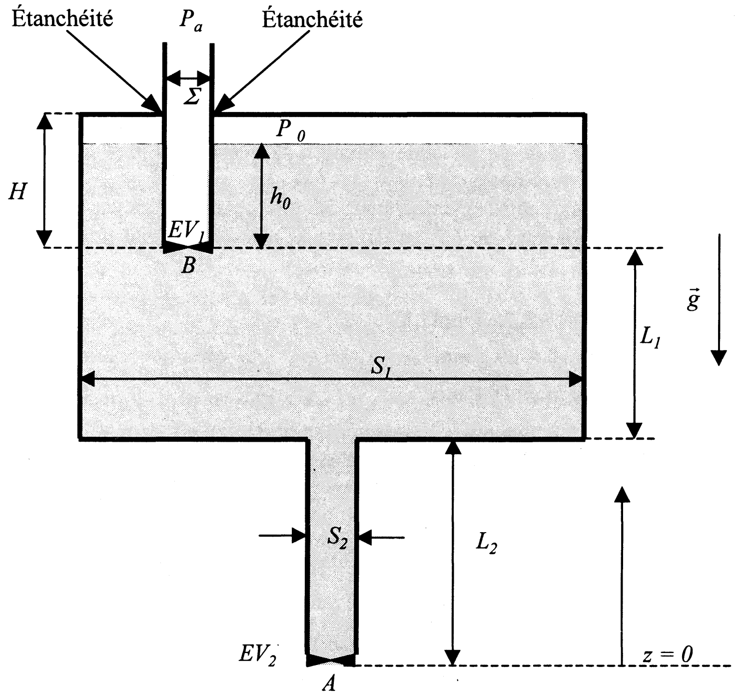
PROBLEME II - VIDANGE D'UN RESERVOIR

La partie I est indépendante des parties II et III.

Rappel d'analyse vectorielle :

$div(f\vec{u}) = f div(\vec{u}) + \vec{u}.\overrightarrow{grad}(f)$ avec f fonction scalaire et $\vec{u}$ vecteur quelconque.

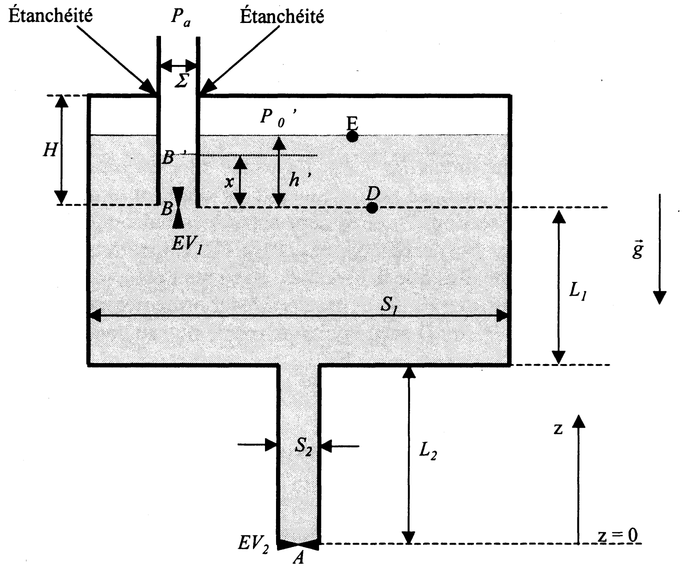
On considère un grand réservoir de section cylindrique S_1. Ce réservoir hermétiquement fermé, contient de l'eau (masse volumique ρ), que l'on assimilera à un fluide parfait, emprisonnant ainsi un matelas d'air à la pression P_0. L'air emprisonné sera assimilé à un gaz parfait.
Un tube plongeur, de section Σ, immergé dans l'eau jusqu'à la profondeur h_0, est relié à l'extérieur où règne la pression atmosphérique P_a. Une étanchéité parfaite est réalisée entre le couvercle du réservoir et le tube plongeur. L'extrémité du tube plongeur est munie d'une électrovanne EV_1, qui est initialement fermée (voir figure 1).
Un tube de vidange cylindrique, de longueur L_2 et de section S_2, est raccordé sur le fond du réservoir ; ce tube est muni d'une électrovanne EV_2 placée à son extrémité, débouchant à la pression atmosphérique P_a.



- Figure 1 - Etat initial : avant ouverture des vannes

I. Etude préliminaire

I.1. Les vannes EV_1 et EV_2 étant initialement fermées, calculer la pression P_B au point B en fonction de P_0 et h_0 en particulier.



- Figure 2 - Après ouverture de la vanne EV_1

I.2. A l'instant $t = 0$, l'électrovanne EV_1 est ouverte brusquement, EV_2 restant fermée. On supposera que les conditions sont telles que $P_B > P_a$. Le liquide monte donc dans le tube plongeur pour passer de B à B', points séparés d'une hauteur x. Une nouvelle pression P_0' s'établit au dessus du liquide, ainsi qu'une nouvelle hauteur de la surface libre notée h' (voir figure 2).

I.2.1. Donner l'expression de P_0' en fonction de x, h' et P_a en particulier.

I.2.2. On pose $\varepsilon = \dfrac{\Sigma}{S_1}$. Ecrire une relation traduisant la conservation du volume d'eau en fonction des paramètres h_0, h', x et ε. Que devient l'expression de $h_0 - h'$ à l'ordre 1 en ε quand $\varepsilon << 1$?

Dans toute la suite du problème on utilisera la relation simplifiée à l'ordre 1.

I.2.3. En supposant que la température de l'air emprisonné ne varie pas, écrire une relation faisant intervenir les paramètres H, h', h_0, P_0 et P_0'.

I.2.4. Exprimer la pression P_0' en fonction de P_0, ε, H, h_0 et x.

Montrer que cette expression peut se mettre sous la forme : $P_0' = P_0\left(1 - \varepsilon \dfrac{x}{H - h_0}\right)$

Donner en fonction de P_a, x, h_0 et ε en particulier, l'expression de la pression P_0'.

I.2.5. Déterminer en fonction de P_0, P_a, H, h_0, ε, ρ et g, l'expression de x en adoptant toujours le premier ordre en ε.

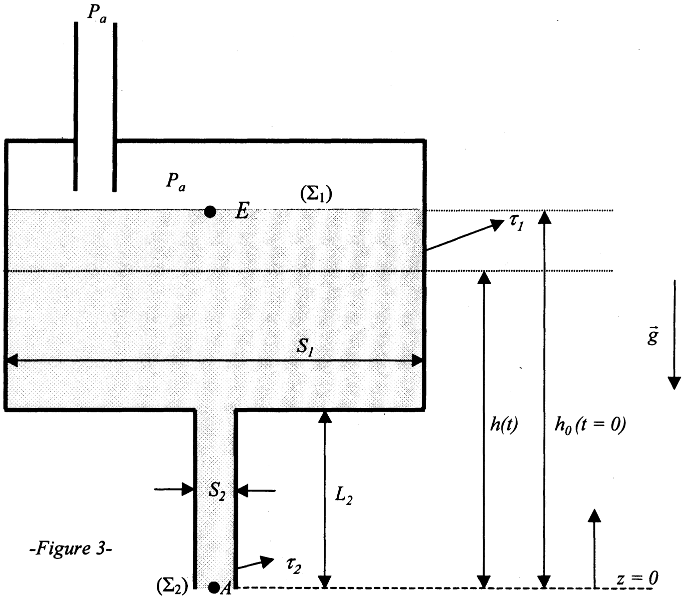
I.3. On supposera désormais que $P_a > P_B$ avant l'ouverture de la vanne EV_1.
Que se passe t-il dès l'ouverture de la vanne EV_1 ?
A l'équilibre, donner la valeur de x et de la pression P_B.
Déterminer l'expression de la nouvelle pression d'équilibre P_0' au-dessus du fluide en fonction de P_a et h_0 en particulier.

I.4. On se place toujours dans le cas $P_a > P_B$. La vanne EV_2 est maintenant ouverte. On attend l'établissement du régime permanent de l'écoulement dans tout le volume de fluide. Les répartitions de vitesse du fluide dans les sections S_1 et S_2 sont supposées uniformes. La vitesse de la surface libre sera notée V_E, et celle dans la section S_2 sera notée V_A, A appartenant à la section de sortie S_2 (voir figure 2). On supposera de plus que le niveau de l'eau reste toujours au-dessus du niveau de B.
Ecrire une relation entre les vitesses V_A, V_E et des données d'ordre géométrique.
Ecrire une relation liant V_D et V_A, où D est un point au même niveau que B.

En déduire que la vitesse en A s'exprime sous la forme : $V_A = \left(\dfrac{2g(L_1 + L_2)}{1 - f\left(\dfrac{S_2}{S_1}\right) g(\varepsilon)} \right)^{1/2}$

où f et g sont deux fonctions que l'on déterminera.
Que devient cette expression lorsque ε tend vers zéro et $S_2/S_1 << 1$? Quel résultat connu retrouve-t-on ?

II. Vidange du réservoir



-Figure 3-

La surface libre du réservoir est maintenant directement reliée à l'atmosphère (voir figure 3). La vanne EV_2 est ouverte et le régime permanent est supposé atteint instantanément. Le volume instantané de fluide contenu dans le réservoir est désigné par τ_1, et celui contenu dans le tube de vidange de longueur L_2 par τ_2. On supposera de plus que $S_1 >> S_2$.

II.1. En supposant un régime quasi-stationnaire, déterminer l'expression de la vitesse au point A en fonction de V_E et $h(t)$.

II.2. Exprimer le rapport V_E/V_A.
Quelle condition doit-on appliquer sur les diamètres D_2 et D_1 (diamètres respectifs des sections S_2 et S_1) pour que V_E n'excède pas 1% de V_A.
Donner alors l'expression de V_A dans ces conditions.
Cette relation sera vérifiée dans toute la suite du problème.

II.3. Pour $h_0 > L_2$, écrire l'équation différentielle vérifiée par la hauteur $h(t)$.

II.4. Dans les mêmes conditions que précédemment, donner l'expression de h en fonction du temps et déterminer le temps t_1 au bout duquel le volume τ_1 a été vidé.
Calculer V_A et t_1. Données : $S_2/S_1 = 1/100$, $L_2 = 1\ m$, $h_0 = 2\ m$, $g = 9{,}81\ ms^{-2}$.

III- Théorème de Bernoulli en régime instationnaire.
On rappelle l'équation locale de l'écoulement parfait d'un fluide (équation d'Euler) :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}V^2 + \left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}\right) \wedge \left(\vec{V}\right) = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}}P + \vec{g}$$

où $\vec{g}$ désigne le champ de pesanteur, $\vec{V}$ le vecteur vitesse et P la pression.

Le fluide est, de plus, supposé incompressible et l'écoulement irrotationnel, mais l'écoulement est non permanent.

III.1. Ecrire, dans ces conditions, l'équation de continuité.
Montrer, en précisant bien toutes les hypothèses, que l'équation d'Euler se ramène à :

$$\frac{\rho}{2}\frac{\partial \vec{V}^2}{\partial t} + \vec{V}.\overrightarrow{\text{grad}}\left(\rho g H\right) = 0$$

où H désigne la quantité $\dfrac{P}{\rho g} + \dfrac{V^2}{2g} + z$, appelée charge du fluide.
Cette dernière équation constitue l'expression du théorème de Bernoulli en régime non permanent.

III.2. Soit la surface fermée $\Sigma(t)$, de volume $\tau(t)$, variable dans le temps.
En intégrant l'expression du théorème de Bernoulli en régime non permanent sur le volume $\tau(t)$, montrer que :

$$\underbrace{\oiint_{\Sigma(t)} \rho g H \vec{V}.\vec{n} d\Sigma}_{I_1} + \underbrace{\iiint_{\tau(t)} \frac{\rho}{2}\frac{\partial \vec{V}^2}{\partial t} d\tau}_{I_2} = 0$$

On se propose d'appliquer la relation précédente à l'établissement du régime de vitesse en A. A l'instant t =0, la vanne EV_2 est ouverte de manière instantanée.
Dans toute la suite du problème, le volume $\tau(t)$ correspond au volume délimité par la surface $\Sigma(t)$ entourant entièrement et exclusivement les volumes $\tau_1(t)$ et $\tau_2(t)$.

III.3. Evaluation du terme I_1

III.3.1. Montrer que l'intégrale bilan I_1 se ramène à : $I_1 = \iint_{\Sigma_1} \rho g H \vec{V}.\vec{n} d\Sigma + \iint_{\Sigma_2} \rho g H \vec{V}.\vec{n} d\Sigma$ où Σ_1 et Σ_2 désignent les 2 surfaces libres du fluide (voir figure 3).

En déduire que $I_1 = \rho g V(t) S_2 \left(H(A) - H(E)\right)$ où $V(t)$ désigne la vitesse en A durant le régime d'établissement.

III.3.2. Donner les expressions de la charge du fluide $H(E)$ au niveau de la surface libre et $H(A)$ au niveau de la sortie du tube de vidange.

Montrer que, si la vitesse de descente de la surface libre V_E est négligeable devant la vitesse en A, l'expression finale de I_1 s'écrit : $I_1 = \rho g V(t) S_2 \left(\frac{V^2(t)}{2g} - h(t) \right)$.

III.4. Evaluation du terme I_2

III.4.1. A quelle condition peut-on écrire : $\frac{\rho}{2} \iiint_\tau \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{V}^2\right) d\tau \approx \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_\tau \vec{V}^2 d\tau \right)$

III.4.2. Dans toute cette question, la notation $[X]$ désignera l'ordre de grandeur de la quantité X.

En admettant que : $\left[\iiint_\tau \vec{V}^2 d\tau \right] = [V]^2 [\tau]$, où τ est le volume de fluide considéré, montrer que :

$$\left[\iiint_\tau \vec{V}^2 d\tau \right] = \underbrace{V^2(t) \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 S_1 (h - L_2)}_{(A)} + \underbrace{V^2(t) L_2 S_2}_{(B)}.$$

Toujours en raisonnant sur les ordres de grandeur et en considérant que h et L_2 sont du même ordre de grandeur, montrer que $(B) >> (A)$.

En déduire que : $I_2 = \frac{\rho}{2} L_2 S_2 \frac{\partial V^2(t)}{\partial t}$.

III.5. Les intégrales I_1 et I_2 étant exprimées, montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $V(t)$ en A est : $\frac{1}{V_A} \left(\frac{dV}{V_A - V} + \frac{dV}{V_A + V} \right) = \frac{dt}{L_2}$

où V_A est la vitesse en A, déterminée en régime stationnaire à la question II.2. On considérera que la vitesse V_A, correspondant au régime stationnaire, ne varie pas pendant le temps d'établissement du régime de vitesse en A.

III.6. En déduire l'expression de la vitesse $V(t)$ en A en fonction du temps et de L_2.

Représenter l'allure de $V(t)$ et dessiner l'asymptote.

III.7. Soit le temps $t_{0,99}$ au bout duquel la vitesse du fluide $V(t)$ en A vaut 99% de la vitesse du régime stationnaire V_A.

Montrer que $t_{0,99} = \frac{\alpha L_2}{V_A}$ où α est une constante que l'on calculera.

Calculer $t_{0,99}$ en prenant comme vitesse V_A la vitesse calculée à la hauteur h_0.

Calculer l'évolution de V_A durant le régime transitoire. L'hypothèse effectuée sur V_A en III.5. paraît-elle justifiée ?

Fin de l'énoncé