ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
Filière PC

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
(L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière PC.

Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objet de ce problème est d'introduire suivant une méthode originale la fonction Γ et de déterminer, à l'aide de cette fonction, une expression de l'intégrale I suivante :

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\ln(\tan x))\, dx.$$

Première partie

Il est admis que, si la fonction réelle f, définie sur un intervalle I de la droite réelle $\mathbb{R}$, est convexe, pour toute suite croissante de trois réels x_1, x_2, x_3, $(x_1 < x_2 < x_3)$ appartenant à l'intervalle I, les valeurs prises par cette fonction en ces points vérifient la relation suivante :

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

Soit F une fonction inconnue, définie sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$, prenant des valeurs strictement positives ($F(x) > 0$), qui vérifie les propriétés suivantes :

i. pour tout réel x strictement positif :

$$F(x+1) = x\,F(x).$$

ii. La fonction $x \mapsto \ln F(x)$ est une fonction convexe.

iii. La fonction F prend la valeur 1 en 1 :

$$F(1) = 1.$$

Encadrement de $F(n+x)$ et de $F(x)$:

Dans les quatre premières questions, x est un réel appartenant à l'intervalle semi-ouvert $]0, 1]$ et n un entier naturel supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$).

1. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\ln F(n) - \ln F(n-1) \leq \frac{\ln F(n+x) - \ln F(n)}{x} \leq \ln F(n+1) - \ln F(n).$$

2. Calculer $F(n)$. En déduire un encadrement de $F(n+x)$ à l'aide des deux expressions $(n-1)^x.(n-1)!$ et $n^x.(n-1)!$.

3. Établir la relation qui lie, pour tout entier p supérieur ou égal à 1 ($p \geq 1$), $F(p+x)$ à $F(x)$.

4. En déduire les inégalités suivantes :

$$\frac{n}{x+n}F(x) \leq \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} \leq F(x).$$

Unicité de la fonction F :

Dans les questions 5 et 6, il est admis qu'il existe une fonction F, positive ($F(x) > 0$), définie sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$, vérifiant les hypothèses **i**, **ii** et **iii**.

Étant donné un entier strictement positif n, soit u_n la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$ par la relation suivante :

$$u_n(x) = \frac{n^x.n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

5. Déterminer, en supposant le réel x appartenir à l'intervalle semi-ouvert $]0, 1]$, la limite de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque l'entier n croît indéfiniment.

6. En déduire la limite de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque l'entier n croît indéfiniment, pour tout réel x strictement positif.

7. En déduire qu'il existe au plus une fonction F définie sur la demi-droite $]0, \infty[$, strictement positive, vérifiant les propriétés **i**, **ii** et **iii**.

Fonction Γ :

Soit k la fonction définie sur le quart de plan $]0, \infty[\times]0, \infty[$ par la relation suivante :

$$k(x, t) = t^{x-1}.e^{-t}.$$

8. Étudier, pour un réel x donné, l'intégrabilité de la fonction : $t \mapsto t^{x-1}.e^{-t}$ sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$.

Soit Γ la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$ par la relation suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}.e^{-t}\, dt.$$

9. Établir que cette fonction Γ est strictement positive ($\Gamma(x) > 0$).

10. Établir que cette fonction Γ est deux fois continûment dérivable sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$. Donner les expressions de ces dérivées. Préciser l'expression de la dérivée de la fonction

Γ pour $x = 1$, $\Gamma'(1)$, au moyen d'une intégrale.

Existence de la fonction F :
11. Démontrer que la fonction Γ est la fonction F étudiée dans les questions précédentes.

Il est admis, dans la suite, que la constante d'Euler γ est définie par la relation suivante :

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

Valeur de $\Gamma'(1)$:
Soit $(g_n)_{n\geq 1}$ la suite des fonctions définies, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$), sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$ par la relation suivante :

$$g_n(x) = x \ln n - \ln x - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

12. Déterminer, à l'aide des résultats obtenus précédemment, la limite de $g_n(x)$ lorsque l'entier n croît vers l'infini et que le réel x appartient à la demi-droite ouverte $]0, \infty[$.

Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$), sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$ par les relations suivantes :

$$v_1(x) = g_1(x) \quad ; \text{ pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à 2,} \quad v_n(x) = g_n(x) - g_{n-1}(x).$$

13. Il est admis que chaque fonction v_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continûment dérivable ; démontrer que la série des fonctions dérivées, de terme général $v_n'(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, est convergente pour tout x strictement positif puis uniformément convergente sur tout segment $[a, b]$ contenu dans la demi-droite ouverte $]0, \infty[$.

14. En déduire la limite de la suite des fonctions dérivées g_n'.

15. Que vaut $\Gamma'(1)$ au moyen de la constante d'Euler γ ?

Seconde partie

Soit s un réel donné strictement positif ($s > 0$).
Fonction L :
16. Étudier la convergence de la série de terme général w_n, $n \in \mathbb{N}$, défini par la relation suivante :

$$w_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}.$$

Soit L la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$ par la relation :

$$L(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}.$$

17. Démontrer que la série entière de terme général

$$\frac{(-1)^n}{2n+1}\,x^{2n+1},\ n \in \mathbb{N},$$

est uniformément convergente sur le segment $[0,\ 1]$. Soit $\varphi(x)$ la somme de cette série :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,x^{2n+1}.$$

Déterminer la fonction φ définie sur le segment $[0,\ 1]$. En déduire $L(1)$.

18. Soit h_s la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$, par la relation suivante :

$$h_s(x) = \frac{\ln x}{x^s}.$$

Étudier les variations de la fonction h_s sur son ensemble de définition. Soit x_s l'abscisse du maximum de cette fonction. Préciser les variations de la fonction $s \mapsto x_s$.

19. Démontrer que la fonction L est continûment dérivable sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$. Exprimer la valeur prise en 1 par la fonction dérivée L', $L'(1)$, au moyen de la somme d'une série.

Expression du produit $L(s).\Gamma(s)$:

20. Calculer, pour tout entier n strictement positif ($n \in \mathbb{N}^*$), au moyen d'une valeur prise par la fonction Γ, l'intégrale suivante :

$$I_n = \int_0^{\infty} e^{-nt}\, t^{s-1}\, dt.$$

21. Démontrer la relation :

$$L(s).\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}\, t^{s-1}\, dt.$$

Calcul de l'intégrale I :

Il est admis que la fonction $s \mapsto L(s).\Gamma(s)$ est continûment dérivable et que sa dérivée est donnée par la relation suivante :

$$\frac{d}{ds}(L(s).\Gamma(s)) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}\ln t}{1+e^{-2t}}\, t^{s-1}\, dt.$$

22. Après avoir donné au réel s la valeur 1, effectuer le changement de variable $u = e^t$ dans l'intégrale. Effectuer un nouveau changement de variables pour obtenir l'intégrale I définie dans le préambule :

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\ln(\tan x))\, dx.$$

En déduire une expression de l'intégrale I à l'aide de la constante d'Euler et de la somme d'une série.

Remarque : un calcul de $L'(1)$ permet d'obtenir le résultat :

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\ln(\tan x))\, dx = \frac{\pi}{2}\ln\left(\sqrt{2\pi}\,\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}\right).$$

FIN DU PROBLÈME