

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,  
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE  
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,  
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,  
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI)  
CONCOURS D'ADMISSION  
SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE  
Filière MP

**(Durée de l'épreuve : 3 heures ; l'usage de la calculatrice est autorisé)**

**Sujet mis à disposition des concours : Cycle international, ENSTIM, INT, TPE-EIVP**

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :  
Physique II – Filière MP

*L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 5 pages.*

• Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

• Il ne faudra pas hésiter à formuler tout commentaire qui vous semblera pertinent, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

## Électrostatique et rayonnement

### Présentation

Cette épreuve concerne le problème de « l'énergie manquante », qui surgit lorsque l'on considère la décharge soudaine de deux condensateurs dans un circuit non inductif et de résistance nulle. Attribuer de force une résistance aux fils (et donc changer le modèle) permet de retrouver cette énergie mais, sur le plan des phénomènes, ne résout pas grand-chose. On aborde dans ce problème une étude plus précise de la situation : les lois de Kirchhoff sont mises en question et l'on fait intervenir le phénomène, usuellement (et légitimement) négligé, du rayonnement.

La première partie présente de façon simple le phénomène de l'énergie manquante. La deuxième, proche du cours, décrit le rayonnement d'une boucle de courant. La troisième partie traite du rayonnement dans un circuit idéal à deux condensateurs. La quatrième partie traite numériquement un circuit réel simple. La cinquième partie est consacrée à une étude qualitative assez fine de la hiérarchie des diverses constantes de temps dans un circuit RLC série. Les parties I et II peuvent se traiter en toute indépendance.

### *I. Circuit de deux condensateurs, régime quasi stationnaire*

□ 1 – Le circuit ouvert de la figure 1 (page suivante) comprend deux condensateurs de capacités respectives  $C_1$  et  $C_2$ . Le premier condensateur porte la charge  $q_{10}$ . Le second n'est pas chargé. Quelle est l'expression de l'énergie électrique  $\mathcal{W}_i$  emmagasinée dans ce circuit ?

□ 2 – On ferme l'interrupteur. Quelle est la tension  $U_f$  d'équilibre des condensateurs ?

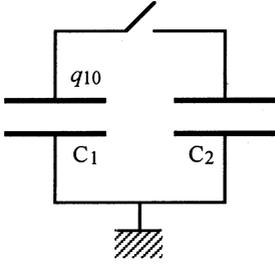


Fig. 1 : deux condensateurs

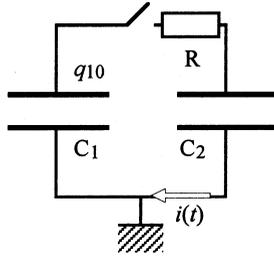


Fig. 2 : Fig. 1+ une résistance

□ 3 – Quelle est l'énergie  $W_f$  emmagasinée maintenant dans le circuit ? Exprimer  $W_f - W_i$  en fonction de  $C_1$ ,  $C_2$  et  $q_{10}$ .

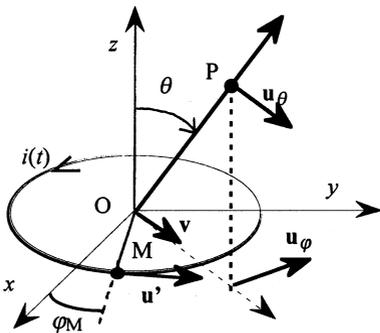
□ 4 – Une interprétation de cette perte d'énergie est que la résistance du circuit n'est pas nulle. C'est ce que montre la figure 2. La tension

$U_f$  et l'énergie  $W_f$  sont-elles changées, du fait de l'introduction de la résistance  $R$  ?

□ 5 – Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la charge  $q_1(t)$  pendant la décharge du condensateur  $C_1$  ? En déduire l'expression du courant  $i(t)$  circulant dans le circuit, puis celle de l'énergie  $Q$  dissipée dans la résistance. Cette énergie dépend-elle de  $R$  ?

□ 6 – Quelle est la constante de temps du circuit ? L'approximation des régimes quasi-stationnaires est-elle valide pour le circuit de la Fig. 1 ?

## II Rayonnement d'une boucle de courant

Fig. 3 : spire de rayon  $a$  ;  $(Ox, \mathbf{v}) = \varphi$ 

Le milieu étant le vide, une spire de centre  $O$ , de rayon  $a$ , placée dans le plan  $(xOy)$  d'un repère galiléen  $R_g(O, x, y, z)$ , est parcourue par le courant  $i(t)$ . Les coordonnées sphériques du point courant  $P$  sont  $(r, \theta, \varphi)$  où  $r = OP$ ,  $\theta$  désigne la colatitude et  $\varphi$  la longitude. Un point  $M$  de la spire est repéré par sa longitude  $\varphi_M$  (Fig. 3) ; on note  $\mathbf{u}'(M)$  le vecteur unitaire tangent à la spire en ce point, et  $t_{MP} = \frac{MP}{c}$ , où  $c$  est la célérité du rayonnement dans le vide.

L'élément de spire  $d\mathbf{s} = (a d\varphi_M) \mathbf{u}'(M)$  contribue au potentiel vecteur au point  $P$  par l'élément

$$d\mathbf{A}(t, P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i(t - t_{MP})}{MP} d\mathbf{s},$$

où  $\mu_0$  désigne la perméabilité du vide.

Il faut un temps caractéristique  $\tau$ , satisfaisant les inégalités  $a \ll c\tau \ll r$ , pour que le courant  $i(t)$  passe d'une certaine valeur  $i_0$  à la valeur nulle.

□ 7 – Montrer que, à chaque instant, on peut considérer le courant comme identique en tout point de la spire.

□ 8 – Montrer sans calcul que le potentiel vecteur  $\mathbf{A}(t, P)$  est porté par le vecteur unitaire

$\mathbf{u}_\varphi$  (représenté Fig. 3). En déduire que la composante  $A_\varphi$  s'écrit :

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{i(t-t_{MP})}{MP} a \cos(\varphi - \varphi_M) d\varphi_M.$$

□ 9 – Vérifier que, au deuxième ordre près en  $\frac{a}{r}$ , et en posant  $u = t - \frac{r}{c}$ , on a

$$MP = r \left[ 1 - \frac{a}{r} \sin(\theta) \cos(\varphi - \varphi_M) \right], \quad i(t-t_{MP}) = i(u) + \frac{a}{c} \frac{di(u)}{du} \sin(\theta) \cos(\varphi - \varphi_M) \text{ et}$$

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4rc} a^2 \frac{di(u)}{du} \sin(\theta)$$

□ 10 – En déduire la composante dominante du champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  en un point P situé à une distance  $r \gg c\tau$  de l'origine. En coordonnées sphériques, le rotationnel d'un vecteur  $\mathbf{V} = V_r \mathbf{u}_r + V_\theta \mathbf{u}_\theta + V_\varphi \mathbf{u}_\varphi$  s'exprime par :

$$\text{rot}(\mathbf{V}) = \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (rV_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial (rV_\theta)}{\partial \varphi} \right] \frac{\mathbf{u}_r}{r^2 \sin \theta} - \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rV_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right] \frac{\mathbf{u}_\theta}{r \sin \theta} + \left[ \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \frac{\mathbf{u}_\varphi}{r},$$

avec  $\mathbf{u}_\theta \wedge \mathbf{u}_\varphi = \mathbf{u}_r$ ,  $\mathbf{u}_\varphi \wedge \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta$  et  $\mathbf{u}_r \wedge \mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_\varphi$ .

□ 11 – Déterminer le champ électrique  $\mathbf{E}$  avec la même approximation. Comparer la structure de l'onde au voisinage du point P avec celle d'une onde plane.

□ 12 – En déduire l'expression du vecteur de Poynting. Montrer, en précisant la valeur de  $K$ , que la puissance rayonnée à travers la sphère de centre O passant par P est :

$$P_{\text{ray}} = K \left( \frac{d^2 i}{dt^2} \right)^2 \quad [1]$$

Indication numérique : avec  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  et  $c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ , on trouve la relation  $K = 2,47 \times 10^{-33} \sigma^2$ , où  $\sigma$  est la surface de la spire, en  $\text{m}^2$

□ 13 – Un dipôle rayonnant de moment dipolaire électrique  $p_0$  (dipôle de Hertz), oscillant à la pulsation  $\omega$ , rayonne dans tout l'espace la puissance moyenne

$$\langle P \rangle = \frac{1}{3} \frac{\mu_0}{4\pi c} p_0^2 \omega^4$$

Établir un lien entre cette expression et la relation [1]

### III Rayonnement dans un circuit à deux condensateurs

On rend compte du rayonnement dans le circuit de la figure 1 en introduisant une boîte noire X, régie par la relation [1], et qui, parcourue par le courant  $i(t)$ , dissipe la puissance  $P_{\text{ray}}$ . On appelle  $V_X$  la tension aux bornes de X. Le circuit équivalent lorsque l'interrupteur est fermé est représenté figure 4.

□ 14 – Montrer, en précisant la valeur de  $C$ , que  $V_X$  satisfait l'équation différentielle (où la constante  $K$  est celle qui intervient dans la relation [1]) :

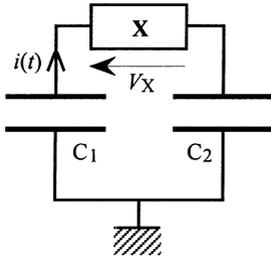


Fig. 4 : Fig. 1 + boîte noire  
que ?

$$\left(\frac{d^3 V_X}{dt^3}\right)^2 + \frac{1}{KC} \left(\frac{dV_X}{dt}\right) V_X = 0. \quad [2]$$

□ 15 – Il se trouve que la solution « physique » de [2] est de la forme  $V_X = V_0 \exp(st)$  ! Déterminer alors les valeurs possibles de  $s$ . La solution de [2] peut-elle être une superposition de fonctions correspondant à diverses valeurs de  $s$  ?

□ 16 – Le choix, que l'on fera, de la solution donnée par la seule valeur réelle de  $s$  est-il admissible du point de vue physique ?

□ 17 – Déterminer  $\frac{d^2}{dt^2} i\left(t - \frac{r}{c}\right)$  et exprimer l'énergie rayonnée entre le temps  $t = \frac{r}{c}$  et  $t = \infty$ . Le résultat obtenu ne devrait pas manquer de susciter un commentaire.

#### IV Un circuit plus réaliste

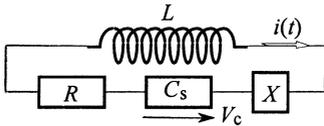


Fig. 5 : un circuit RLC série

Le circuit de la figure 5 comprend une résistance  $R$ , une inductance  $L$ , la boîte noire  $X$ , régie encore par la relation [1], et un condensateur de capacité  $C_s$ , équivalent aux deux condensateurs précédents.

□ 18 – Montrer que l'équation différentielle relative à  $V_C$ , tension aux bornes de  $C_s$ , a des solutions exponentielles  $V_C = A_C \exp(-qt)$ , avec  $q$  réel et positif, pourvu que

$$q^5 - \frac{L}{K} q^2 + \frac{R}{K} q - \frac{1}{KC_s} = 0. \quad [3]$$

Que se passe-t-il lorsque  $K \rightarrow 0$  ?

□ 19 – Donner un sens à l'affirmation suivante : la résistance radiative est  $R_{rad} = Kq^4$ .

□ 20 – Quelques résultats numériques pour le circuit  $RC$  radiatif ( $L = 0$ ), avec  $C_s = 100 \mu\text{F}$ ,  $a = 5 \text{ cm}$  et dans la gamme  $10^{-7} \Omega \leq R \leq 10^{-3} \Omega$ , sont présentés ci-dessous.

$R (\Omega)$	$10^{-7}$	$5 \times 10^{-7}$	$10^{-6}$	$5 \times 10^{-6}$	$10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$	$10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	$10^{-3}$
$q (\text{s}^{-1})$	$1,15 \times 10^9$	$1,14 \times 10^9$	$1,13 \times 10^9$	$1,01 \times 10^9$	$8,21 \times 10^8$	$2,00 \times 10^8$	$1 \times 10^8$	$2 \times 10^7$	$1 \times 10^7$
$R_{rad}/R$	85,62	16,49	7,85	0,98	0,22	$1,50 \times 10^{-4}$	$4,82 \times 10^{-6}$	$1,54 \times 10^{-9}$	$4,82 \times 10^{-11}$

Commenter ces résultats. Par exemple : dans quels cas a-t-on affaire à un déclin radiatif, ou au déclin ordinaire d'un circuit  $RC$  ? pourquoi, lorsque la résistance  $R$  est suffisamment petite,  $q$  est-il essentiellement constant ? que vaudrait  $q$  pour  $R = 1 \Omega$  ? Esquisser l'allure d'une sorte de « diagramme de Bode » donnant  $\ln\left(\frac{R_{rad}}{R}\right)$  en fonction de  $\ln(R)$ . À quelle

forme asymptotique de l'équation [3], qui se ramène ici à  $Kq^5 + Rq - \frac{1}{C_s} = 0$ , correspond

chacune des asymptotes de ce diagramme ? On pourra introduire la résistance de coupure

$$R_c = \left( \frac{K}{C_s^4} \right)^{\frac{1}{5}}, \quad R_c \approx 6,86 \times 10^{-5} \Omega.$$

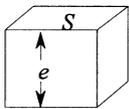
### V Discussion des effets radiatifs

On considère un circuit  $RLC$  série ordinaire, avec  $C = 0,68 \text{ pF}$ ,  $L = 20 \times 10^{-9} \text{ H}$ ,  $R = 3,5 \text{ k}\Omega$ , correspondant à une résistivité  $\rho = 0,80 \text{ }\Omega\cdot\text{m}$ .

□ 21 – Justifier que, dans ce circuit, la dépendance temporelle de la charge dans le condensateur puisse être  $q(t) = q_0 \exp(-st)$ , avec  $s^{-1} \approx \tau_{RC} = RC$ .

□ 22 – Les câbles de connexion sont, à l'intérieur, électriquement neutres. Ils portent cependant des charges surfaciques, qui contrôlent les champs électriques ; en réalité, ces deux grandeurs se contrôlent mutuellement. L'échelle de temps de cette interaction est le temps de réarrangement des charges surfaciques, c'est-à-dire le temps que met l'information à se propager dans le circuit. Ce temps est, en grossière approximation,  $\tau_I \approx \frac{\ell}{c}$ , où  $\ell$  est la

taille caractéristique du circuit. On pose  $\alpha = \frac{\tau_{RC}}{\tau_I}$ . Discuter, selon les valeurs de  $\alpha$ , le régime de retour à l'état d'équilibre des charges dans le condensateur. On justifiera, en particulier, que pour  $\alpha \ll 1$ , les effets radiatifs sont importants. Qu'en est-il pour le circuit considéré, dans lequel  $\ell = 5 \text{ cm}$  ?



□ 23 – La résistance est modélisée par le parallélépipède représenté ci-contre, de section  $S$  et d'épaisseur  $e$ . La permittivité diélectrique du matériau est prise égale à celle du vide :  $\epsilon_0 \approx 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$  ; la capacité ainsi constituée est  $C_M = \epsilon_0 \frac{S}{e}$ . Il existe donc une autre échelle de

temps dans ce circuit,  $\tau_M = \epsilon_0 \rho$ . Comment intervient-elle ?

## FIN DE L'ÉPREUVE