ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
(L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière MP.
Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Première partie

Le but de cette première partie est d'établir des résultats qui seront utiles dans la seconde partie.

Étant donné un entier n strictement positif ($n \geq 1$), soient S_n et I_n les deux réels définis par les relations ci-dessous :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{i+j+1}\right) \quad ; \quad I_n = \int_0^n dx \int_0^n \frac{dy}{x+y+1}.$$

Intégrale I_n.

1. Calculer, pour toute valeur de l'entier strictement positif n, l'intégrale I_n.

2. Déterminer les constantes A, B, C et D figurant dans le développement limité de la fonction $n \mapsto I_n$ à l'infini qui s'écrit sous la forme suivante :

$$I_n = A\,n + B\,\ln n + C + \frac{D}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Somme S_n :
3. Établir un encadrement du réel S_n à l'aide de I_n.

4. En déduire que la somme S_n est équivalente à l'infini à $2\,n\,\ln 2$.

Soit J_n l'intégrale suivante :

$$J_n = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)^2 dx.$$

Intégrale J_n :
5. Déterminer la relation qui lie l'intégrale J_n au réel S_n. En déduire, lorsque l'entier n croît indéfiniment, un équivalent de J_n à l'infini.

Seconde partie

Soit E un espace préhilbertien réel ; soit $(x, y) \mapsto (x \mid y)$ le produit scalaire de cet espace. La norme d'un vecteur x de E, déduite de ce produit scalaire est notée $\|x\|$.

Étant donné un réel μ supérieur ou égal à 1 ($\mu \geq 1$), une suite de n vecteurs d'un espace euclidien E_n, de dimension finie n, $x_1, x_2, ..., x_n$ est dite μ-presque orthogonale (en abrégé μ-p.o.) si et seulement si :

i. les vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ sont de norme unité,
ii. pour toute suite finie de n réels $a_1, a_2, ..., a_n$ la norme du vecteur $\sum_{i=1}^n a_i\, x_i$ vérifie la double inégalité suivante :

$$\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n (a_i)^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i\, x_i \right\|^2 \leq \mu \sum_{i=1}^n (a_i)^2.$$

Plus généralement : une suite dénombrable $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel est dite presque orthogonale (p. o.), si et seulement s'il existe un réel $\mu \geq 1$ tel que, pour tout entier n strictement positif, pour toute suite extraite $x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_n}$ de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et pour toute suite finie de n réels $a_1, a_2, ..., a_n$, la norme du vecteur $\sum_{i=1}^n a_i\, x_{k_i}$ vérifie la relation suivante :

$$\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n (a_i)^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i\, x_{k_i} \right\|^2 \leq \mu \sum_{i=1}^n (a_i)^2.$$

Remarque : la suite des indices $k_1, k_2, ..., k_n$ de la suite extraite $x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_n}$, est une suite monotone strictement croissante $k_1 < k_2 < ... < k_n$.

Premières propriétés :
Soit E_n un espace euclidien de dimension n.
6. Démontrer que, pour qu'une suite de n vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ soit une base orthonormée de E_n, il faut et il suffit qu'elle soit une suite 1-presque orthogonale.

7. Démontrer que, si une suite de n vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ de E_n est μ-presque orthogonale, la suite est libre.

Un exemple :

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur le segment $[0,\ 1]$; le produit scalaire de deux fonctions f et g de E est défini par la relation suivante :

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx.$$

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des fonctions de E définies par la relation suivante :

$$P_n(x) = \sqrt{2n+1}\ x^n.$$

8. Démontrer que, bien que la suite des fonctions P_n de norme unité soit libre, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas presque orthogonale.

Soit $(V_1,\ V_2,\ ...,\ V_n)$ une suite libre de n vecteurs indépendants unitaires d'un espace euclidien E_n de dimension n. Soit M la matrice carrée d'ordre n dont les éléments m_{ij} sont égaux aux produits scalaires des vecteurs V_i et V_j.

$$M = (m_{ij}) \quad ; \quad m_{ij} = (V_i \mid V_j).$$

Étant donnée une suite de n réels $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$, soit A le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$ et W le vecteur égal à la combinaison linéaire des vecteurs $V_1,\ V_2,\ ...,\ V_n$ avec les coefficients $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad ; \quad W = \sum_{i=1}^{n} a_i\, V_i.$$

La suite de vecteurs $V_1,\ V_2,\ ...,\ V_n$ est μ-presque orthogonale :

9. Démontrer l'existence d'une matrice carrée P orthogonale et d'une matrice diagonale D dont tous les éléments de la diagonale sont différents de 0, telles que :

$$M = {}^tP.D.P.$$

10. Établir la relation qui lie la norme du vecteur W au réel ${}^tA.M.A$; ${}^tA$ désigne la matrice transposée de la matrice colonne A.

11. En déduire que les éléments de la matrice D sont strictement positifs, puis en déduire un encadrement de la norme du vecteur W à l'aide des valeurs propres de la matrice M et de la norme du vecteur B égal à l'image par la matrice P du vecteur A ($B = P.A$).

12. En déduire que la suite $(V_1,\ V_2,\ ...,\ V_n)$ est μ-presque orthogonale ; préciser des valeurs possibles pour le réel μ.

Soit maintenant $(V_n)_{n\geq 1}$ une suite dénombrable de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel E.

Une condition suffisante :

13. Démontrer que, s'il existe un réel α, strictement supérieur à 3 ($\alpha > 3$), tel que le produit scalaire de deux vecteurs V_p et V_q soit majoré en valeur absolue par le réel $\alpha^{-|p-q|}$, c'est-à-dire :

$$|(V_p \mid V_q)| \leq \frac{1}{\alpha^{|p-q|}},$$

la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ est presque orthogonale.

Deux questions préliminaires :

14. Soit f la fonction définie dans le quart de plan $[1,\infty[\times[1,\infty[$ par la relation suivante :

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{2y+1}\,\sqrt{2xy+1}}{y+xy+1}.$$

Soit G la fonction, définie sur la demi-droite $[1,\infty[$, par la relation suivante :

$$G(x) = \lim_{y\to\infty} f(x, y).$$

Étudier les variations des six fonctions définies sur la demi-droite fermée $[1,\infty[$ par les relations suivantes :

$$x \mapsto f(x, 1)\ ;\quad y \mapsto f(1, y)\ ;\ G\ :\ x \mapsto \lim_{y\to\infty} f(x, y)\ ;$$
$$y \mapsto \lim_{x\to\infty} f(x, y)\ ;\quad f_y\ :\ x \mapsto f(x, y);\quad f_x\ :\ y \mapsto f(x, y).$$

15. Soit γ un réel strictement compris entre 0 et 1 ($0 < \gamma < 1$). Démontrer l'existence d'une fonction φ_γ, définie sur la demi-droite fermée $[1,\infty[$, telle que, pour tout réel y de la demi-droite $[1,\infty[$, la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$f(\varphi_\gamma(y), y) = \gamma.$$

Démontrer l'existence d'un réel β tel que la fonction G, définie ci-dessus, prenne la valeur γ en ce point : $G(\beta) = \gamma$. Démontrer que ce réel β est strictement supérieur à 1 et est un minorant de l'image par φ_γ de la demi-droite fermée $[1,\infty[$.

Soit (P_{k_i}) une suite extraite de la suite des polynômes considérés à la question 8. L'application $i \mapsto k_i$ est une suite strictement croissante. Pour simplifier les notations, soit Q_i le polynôme P_{k_i} :

$$Q_i = P_{k_i}.$$

Étude de la suite $(Q_i)_{i\geq 0}$:

16. On choisit une suite $(k_i)_{i\geq 0}$ telle que la suite $(Q_i)_{i\geq 0}$ soit presque orthogonale.

Démontrer que le réel μ entrant dans la définition de la presque orthogonalité est strictement supérieur à 1 ($\mu > 1$).

Démontrer qu'il existe un réel β, strictement supérieur à 1 ($\beta > 1$), tel que, pour tout indice i, les indices k_i et k_{i+1} soient liés par la relation suivante :

$$k_{i+1} \geq \beta\, k_i.$$

FIN DU PROBLÈME