

SESSION 2003



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

MPM207

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

---

## MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

*Les calculatrices sont interdites.*

\* \* \*

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

### Calculs de distances entre une matrice et certaines parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

#### Notations

Dans ce sujet,  $n$  est un entier naturel non nul et on note :

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  : la  $\mathbb{R}$ -algèbre des matrices carrées réelles d'ordre  $n$ .

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  : le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à  $n$  lignes et à une colonne.

Pour une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  ${}^tA$  est sa matrice transposée,  $\text{rang}(A)$  son rang et  $\text{Tr}(A)$  sa trace.

$I_n$  : la matrice unité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  : le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  : le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  : l'ensemble des matrices positives de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  c'est-à-dire des matrices  $A$  de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  vérifiant : pour toute matrice  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  ${}^tXAX \geq 0$ .

$\text{GL}_n(\mathbb{R})$  : le groupe des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  : le groupe des matrices réelles orthogonales c'est-à-dire des matrices  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant :  ${}^tMM = I_n$ .

Pour  $p$  entier naturel,  $\Delta_p$  est l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de rang supérieur ou égal à  $p$  et

$\nabla_p$  est l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de rang inférieur ou égal à  $p$ .

**Objectifs**

Le but du sujet est de calculer la distance (par la norme de Schur définie à la question II.3.) d'une matrice à :

dans la partie II.,  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  par le théorème de projection orthogonale,

dans la partie III.,  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  par le théorème de décomposition polaire,

dans la partie IV.,  $\Delta_p$  par des notions de densité,

dans la partie V.,  $\nabla_p$  par le théorème de Courant et Fischer.

La partie I. traite un exemple qui sera utilisé dans les différentes parties.

Remarque : dans le texte, le mot « positif » signifie « supérieur ou égal à 0 ».

**I. Exercice préliminaire**

1. Soit la matrice  $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , on pose  $H = {}^t\Gamma \Gamma$ .

Diagonaliser la matrice  $H$  et déterminer une matrice  $P$  de  $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $D$  à termes tous positifs telles que  $D^2 = P^{-1} H P$ .

2. On pose  $S = P D P^{-1} \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$ , montrer que la relation  $\Gamma = U S$  définit une matrice  $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$  et calculer cette matrice.

**II. Calcul de la distance de  $A$  à  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et à  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$** 

3. Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on pose  $(A | B) = \text{Tr}({}^t A B)$ .  
Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

La norme associée à ce produit scalaire (norme de Schur) est notée :  $\|A\| = ((A | A))^{\frac{1}{2}}$ .

Dans tout le sujet, si  $\Pi$  est une partie non vide de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , la distance d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  à la partie  $\Pi$  est le réel  $d(A, \Pi) = \inf_{M \in \Pi} \|A - M\|$ .

4. Montrer que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et que cette somme directe est orthogonale.
5. Si  $A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , montrer que  $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \left\| \frac{1}{2}(A - {}^t A) \right\|$  et déterminer de même  $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$ .
6. Calculer  $d(\Gamma, \mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$  où  $\Gamma$  est la matrice exemple de la partie I.

### III. Calcul de la distance de $A$ à $O_n(\mathbb{R})$

#### A. Théorème de la décomposition polaire

7. Montrer qu'une matrice  $S$  de  $S_n^+(\mathbb{R})$  appartient à  $S_n^+(\mathbb{R})$  si et seulement si toutes les valeurs propres de  $S$  sont positives ou nulles.
8. Si  $A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  montrer que la matrice  ${}^t A A \in S_n^+(\mathbb{R})$ .
9. Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on suppose qu'il existe une matrice diagonale  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  à termes positifs telle que  ${}^t A A = D^2$ .  
On note  $A_1, A_2, \dots, A_n$  les matrices de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  qui forment les colonnes de la matrice  $A$ .
- Pour tout couple  $(i, j)$  d'entiers naturels compris entre 1 et  $n$ , évaluer  ${}^t A_i A_j$ .  
En particulier, si  $i$  est un entier pour lequel  $d_i = 0$ , que vaut  $A_i$  ?
  - Montrer que l'on peut trouver une base orthonormée  $(E_1, E_2, \dots, E_n)$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  (par rapport au produit scalaire canonique  $\langle X, Y \rangle = {}^t X Y$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ) telle que, pour tout entier naturel  $i$  entre 1 et  $n$ ,  $A_i = d_i E_i$ .
  - En déduire qu'il existe une matrice  $E$  de  $O_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = E D$ .
10. Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  ${}^t A A = {}^t B B$ .
- Montrer qu'il existe une matrice diagonale  $D$  à termes positifs et une matrice orthogonale  $P$  telles que :  $P^{-1} {}^t A A P = P^{-1} {}^t B B P = D^2$ .
  - Montrer qu'il existe une matrice  $U$  de  $O_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = U B$ .
11. Dédurre des questions précédentes le théorème de décomposition polaire :  
Pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , il existe une matrice  $U$  de  $O_n(\mathbb{R})$  et une matrice  $S$  de  $S_n^+(\mathbb{R})$  telles que  $A = U S$ .  
(Remarque : on peut également établir l'unicité de la matrice  $S$  de  $S_n^+(\mathbb{R})$  et même l'unicité de la matrice  $U$  de  $O_n(\mathbb{R})$  si  $A$  est de plus inversible dans cette décomposition mais ce ne sera pas utile pour la suite du problème).

#### B. Calcul de $d(A, O_n(\mathbb{R}))$

12. Montrer que, pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et pour toute matrice  $\Omega$  de  $O_n(\mathbb{R})$ ,  
 $\|M \Omega\| = \|\Omega M\| = \|M\|$ .

**13.** Dans la suite de cette partie, soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , soit  $U \in O_n(\mathbb{R})$  et  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  telles que  $A = U S$ ; il existe une matrice diagonale  $D$  et une matrice  $P$  de  $O_n(\mathbb{R})$  telles que  $S = P D P^{-1}$ .

a. Montrer que, pour toute matrice  $\Omega$  de  $O_n(\mathbb{R})$ ,  $\|A - \Omega\| = \|S - U^{-1}\Omega\|$  et en déduire que  $d(A, O_n(\mathbb{R})) = d(S, O_n(\mathbb{R}))$ .

b. Montrer que  $d(A, O_n(\mathbb{R})) = d(D, O_n(\mathbb{R}))$ .

**14.** On note  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ .

a. Montrer que pour toute matrice  $\Omega$  de  $O_n(\mathbb{R})$ ,  $\|D - \Omega\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2 \text{Tr}(D \Omega) + n$ .

b. Montrer que pour toute matrice  $\Omega$  de  $O_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{Tr}(D \Omega) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i$ .

c. Conclure que  $d(D, O_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|$ .

**15.** Montrer que  $d(A, O_n(\mathbb{R})) = \|A - U\|$ .

**16.** Calculer  $d(\Gamma, O_3(\mathbb{R}))$  où  $\Gamma$  est la matrice exemple de la partie I.

#### IV. Calcul de la distance de $A$ à $\Delta_p$

**17.** Un résultat de densité.

a. Soit  $M$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , montrer qu'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que pour tout réel  $\lambda$  vérifiant  $0 < \lambda < \alpha$ , la matrice  $M - \lambda I_n$  est inversible.

b. En déduire que  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**18.** Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , déterminer, pour tout entier naturel  $p \leq n$ ,  $d(A, \Delta_p)$ .

#### V. Calcul de la distance de $A$ à $\nabla_p$

##### A. Théorème de Courant et Fischer

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . On notera  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  ses valeurs propres, on notera  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ,  $P$  la matrice de  $O_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $A = P D P$  et  $C_1, C_2, \dots, C_n$  les matrices de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  formant les colonnes de la matrice  $P$ .

Si  $k$  est un entier entre 1 et  $n$ , on note  $\Psi_k$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de dimension  $k$ . Nous allons montrer que :

$$\lambda_k = \max_{F \in \Psi_k} \min_{X \in F - \{0\}} \frac{{}^t X A X}{{}^t X X} \quad (\text{théorème de Courant et Fischer}).$$

19. Soit  $X$  un vecteur de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de coordonnées  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  dans la base orthonormée  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Calculer en fonction des  $x_i$  et  $\lambda_i$  ( $i$  compris entre 1 et  $n$ ) :

$${}^t X A X \text{ et } {}^t X X \text{ et pour } k \text{ entier entre 1 et } n, \frac{{}^t C_k A C_k}{{}^t C_k C_k}.$$

20. Soit  $k$  entier entre 1 et  $n$ , on pose  $F_k = \text{vect}\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ .

Montrer que pour tout  $X$  non nul de  $F_k$ ,  $\frac{{}^t X A X}{{}^t X X} \geq \lambda_k$  et déterminer  $\min_{X \in F_k - \{0\}} \frac{{}^t X A X}{{}^t X X}$ .

21. Soit  $F \in \Psi_k$ ,

a. montrer que  $\dim(F \cap \text{vect}\{C_k, C_{k+1}, \dots, C_n\}) \geq 1$ .

b. Si  $X$  est un vecteur non nul de  $F \cap \text{vect}\{C_k, C_{k+1}, \dots, C_n\}$ , montrer que  $\frac{{}^t X A X}{{}^t X X} \leq \lambda_k$ .

22. Conclure.

## B. Calcul de $d(A, \nabla_p)$

*Dans toute cette partie* :  $A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de rang  $r$  et  $p$  est un entier naturel,  $p < r$ .

23. Montrer qu'il existe deux matrices  $E$  et  $P$  de  $O_n(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $D$  à termes positifs telles que  $A = E D P$ . En déduire que le rang de la matrice  ${}^t A A$  est encore  $r$ .

(On pourra utiliser les résultats de la question 9.)

24. Si on note les valeurs propres de la matrice symétrique réelle  ${}^t A A$  de rang  $r$  :

$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > 0$  et  $\mu_{r+1} = \dots = \mu_n = 0$ , si on pose  $D = \text{diag}(\sqrt{\mu_1}, \sqrt{\mu_2}, \dots, \sqrt{\mu_r}, 0, \dots, 0)$ ,

si pour  $1 \leq l \leq n$  on note  $M_l$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont la  $l$ -ième colonne est celle de la matrice  $E \in O_n(\mathbb{R})$  de la question 23., tous les autres termes de  $M_l$  étant nuls, on a clairement :

$$E D = \sum_{l=1}^n \sqrt{\mu_l} M_l.$$

Montrer alors qu'il existe une famille orthonormale  $(R_1, R_2, \dots, R_n)$  de matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (pour le produit scalaire  $(A|B) = \text{Tr}({}^t A B)$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ), toutes de rang un, et telles que

$$A = \sum_{l=1}^n \sqrt{\mu_l} R_l = \sum_{l=1}^r \sqrt{\mu_l} R_l.$$

25. Avec les notations de la question 24, on pose  $N = \sum_{l=1}^p \sqrt{\mu_l} R_l$ .

Montrer que  $\text{rang}(N) \leq p$  puis que  $d(A, \nabla_p) \leq \sqrt{\mu_{p+1} + \dots + \mu_r}$ .

26. Soit  $M$  une matrice de rang  $p$  ( $p < r$ ), on note  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0$  les valeurs propres de la matrice  $'(A - M)(A - M)$  et on pose  $G = \text{Ker } M \cap \text{Im}'(A A)$ .

Soit  $k$  un entier compris entre 1 et  $r - p$ .

a. Montrer que  $\dim G \geq r - p$ .

b. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $G$  de dimension  $k$ , montrer que :

$$\alpha_k \geq \min_{X \in F - \{0\}} \frac{'X' A A X}{'X X}.$$

c. On note  $(V_1, V_2, \dots, V_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de la matrice  $'A A$ , le vecteur  $V_i$  étant associé à la valeur propre  $\mu_i$  de telle sorte que :  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > 0$  et  $\mu_{r+1} = \dots = \mu_n = 0$ .

Montrer que  $\dim(G \cap \text{vect}\{V_1, V_2, \dots, V_{k+p}\}) \geq k$ .

d. En déduire que  $\alpha_k \geq \mu_{k+p}$ .

27. En déduire  $d(A, \nabla_p)$ .

28. Calculer, pour  $p \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $\gamma_p = d(\Gamma, \nabla_p)$  où  $\Gamma$  est la matrice exemple de la partie I.

**Fin de l'énoncé.**