Concours Centrale - Supélec 2002

Épreuve : MATHÉMATIQUES I Filière PSI

Notations et objectifs du problème

Pour toutes les questions géométriques on se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure affine euclidienne canonique et de son repère orthonormé naturel. Le but de ce problème est d'étudier quelques caractéristiques du mouvement sur l'axe Ox d'un mobile qui se trouve à l'origine O au temps initial $t = 0$ et au temps $t = 1$ et dont la vitesse initiale est nulle.

- L'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathscr{C}$. Si (Φ) est une famille finie d'éléments de $\mathscr{C}$, le sous-espace de $\mathscr{C}$ qu'engendre (Φ) est noté $\mathrm{Vect}(\Phi)$.
- La norme de la convergence uniforme sur $\mathscr{C}$ est notée $\| \ \|_\infty$.
- On note $\langle \ | \ \rangle$ le produit scalaire sur $\mathscr{C}$ défini par :

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

L'orthogonalité entre éléments de $\mathscr{C}$ est toujours relative à ce produit scalaire dont la norme associée est notée $\| \ \|_2$. L'orthogonal d'un sous-espace $\mathscr{E}$ de $\mathscr{C}$ est noté $\mathscr{E}^\perp$.

- On désigne par u l'élément de $\mathscr{C}$ défini par $u(t) = \sqrt{3}(1-t)$ et par $\mathscr{H}$ l'orthogonal de la droite $\mathrm{Vect}(u)$.
- On appelle *mouvement admissible* toute application ξ de classe $\mathscr{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\xi(0) = \xi'(0) = \xi(1) = 0$$

On note $\mathscr{A}$ le sous espace vectoriel de $\mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ constitué des mouvements admissibles.

On établit d'abord des résultats préliminaires très proches du cours et utiles dans tout le problème. Dans la partie II on calcule la meilleure borne pour la moyenne quadratique de la vitesse en fonction de l'accélération. La partie I fait établir des résultats qui servent dans la fin de la partie II ; on peut admettre ces résultats pour traiter la partie II.

Dans tout le problème, on note, pour $k \in \mathbb{N}$, $\omega_k = k\pi + \frac{\pi}{2}$ et e_k l'élément de $\mathscr{C}$ défini par :

$$\forall t \in [0,1], e_k(t) = \sqrt{2}\cos(\omega_k t)$$

On pose, par ailleurs, $\Omega =]0,+\infty[-\{\omega_k | \ k \in \mathbb{N}\}$, complémentaire de $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dans $]0,+\infty[$.

Résultats préliminaires

A - Soit $h \in \mathscr{C}$, $h \neq 0$. Justifier l'égalité

$$\mathscr{C} = \mathrm{Vect}(h) \oplus \mathrm{Vect}(h)^{\perp}$$

et montrer soigneusement que $(\mathrm{Vect}(h)^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Vect}(h)$.

On note Π_h le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(h)^{\perp}$.

Démontrer que, pour $f \in \mathscr{C}$:

$$\Pi_h(f) = f - \frac{\langle f | h \rangle}{\|h\|_2^2} h$$

B -Montrer que l'application $\xi \mapsto \xi''$ est un isomorphisme de $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{H}$ dont l'isomorphisme réciproque est défini par

$$z \mapsto \left(t \mapsto \int_0^t (t-s)z(s)ds\right)$$

Partie I - Comportement asymptotique de racines d'équations

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les coefficients de Fourier en sinus et cosinus d'une fonction réelle f, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 4-périodique, donnés par :

$$a_n(f) = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx \ ; \qquad b_n(f) = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right)dx \,.$$

I.A - Démontrer que $(e_k)_{k\in N}$ est une famille orthonormale de $\mathscr{C}$.

I.B - Pour $f\in\mathscr{C}$, on note $\tilde{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 4-périodique et paire, telle que, pour $t\in]-2,2]$ on ait :

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t\in[0,1] \\ 0 & \text{si } t=1 \\ -f(2-t) & \text{si } t\in]1,2] \end{cases}$$

I.B.1) Donner, sans démonstration, quelques éléments de symétrie du graphe de $\tilde{f}$. Montrer que $\tilde{f}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. À quelle condition est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

I.B.2) Expliciter, pour $k\in\mathbb{N}$, $a_{2k+1}(\tilde{f})$ en fonction $\langle f|e_k\rangle$. Calculer les autres coefficients de Fourier de $\tilde{f}$.

I.B.3) Montrer, en citant précisément les théorèmes utilisés, que, si $f\in\mathscr{C}$:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\langle e_k|f\rangle^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f-\sum_{k=0}^{n}\langle f|e_k\rangle e_k\right\|_2 = 0$$

I.B.4) Montrer de même que, si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et si $f(1)=0$, alors, pour tout $t\in[0,1]$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\langle f|e_k\rangle e_k(t)$$

La série de fonctions du second membre converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

I.B.5) En appliquant les résultats des deux questions précédentes aux fonctions u et $t\mapsto\sin(\omega(t-1))$, prouver les relations :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\omega_k^2} = \frac{1}{2}$$

et, pour $\omega\in\Omega$

$$\tan\omega = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\omega}{\omega_k^2-\omega^2}$$

I.B.6) On note ϕ la fonction définie, pour $\omega\in\Omega$, par :

$$\phi(\omega) = \frac{1}{2\omega}[\omega-\tan\omega]$$

Démontrer que, pour $\omega \in \Omega$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^2}{\omega_k^2(\omega^2 - \omega_k^2)} = \phi(\omega)$$

I.C - On pose pour $\omega \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$\phi_n(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega^2}{\omega_k^2(\omega^2 - \omega_k^2)}$$

I.C.1) Montrer que, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, ϕ_n a une unique racine dans l'intervalle $]\omega_k, \omega_{k+1}[$. On note μ_n la plus petite de ces racines, c'est-à-dire la racine de ϕ_n appartenant à l'intervalle $]\omega_0, \omega_1[$.

I.C.2) Comparer ϕ_n et ϕ_{n+1} sur $]\omega_0, \omega_1[$. En déduire que la suite $(\mu_n)_{n \geq 2}$ converge en décroissant vers une limite $\mu \in [\omega_0, \omega_1[$.

I.C.3) Montrer que la suite $(\phi - \phi_n)_{n \geq 2}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $]\omega_0, \omega_1[$. En conclure que μ est différent de ω_0 et est l'unique racine de ϕ dans l'intervalle $]\omega_0, \omega_1[$.

Calculer une valeur approchée de μ à 10^{-6} près en justifiant l'algorithme utilisé.

Partie II - Estimation de la vitesse en moyenne quadratique

On se propose, dans cette partie, d'établir que, si $\xi \in \mathcal{A}$:

$$\|\xi'\|_2 \leq \frac{1}{\mu}\|\xi''\|_2$$

où μ a été défini dans la question I.C.2, et que cette constante $\frac{1}{\mu}$ est la plus petite possible valable quel que soit $\xi \in \mathcal{A}$.

- L'entier naturel n est toujours supposé supérieur ou égal à 2.
- Pour $h \in \mathcal{C}$, la notation Π_h est celle définie dans la question A - des préliminaires.

II.A - Pour $z \in \mathcal{C}$, on note $T(z)$ la fonction y définie sur $[0,1]$ par :

$$y(t) = (1-t)\int_0^t z(s)ds + \int_t^1 (1-s)z(s)ds$$

II.A.1) Montrer que $y = T(z)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et vérifie les relations suivantes :

$$\begin{cases} y'' = -z \\ y(1) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

II.A.2) Prouver que T est un endomorphisme de $\mathscr{C}$ et que, si z_1 et z_2 appartiennent à $\mathscr{C}$,

$$\langle T(z_1)|z_2\rangle = \langle z_1|T(z_2)\rangle$$

II.A.3) Montrer que e_k est un vecteur propre de T pour une valeur propre à préciser en fonction de ω_k. Déduire de la question I.B.3 que, pour tout $z \in \mathscr{C}$:

$$\|T(z)\|_2 \leq \frac{4}{\pi^2}\|z\|_2$$

et donner un cas d'égalité avec $z \neq 0$.

II.B - On note u_n la projection orthogonale de u sur $\mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{H}_n = \mathscr{H} \cap \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.

II.B.1) Montrer que $\mathscr{H}_n = \mathrm{Vect}(u_n)^{\perp} \cap \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.

Calculer les coordonnées de u_n dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ et préciser la dimension de $\mathscr{H}_n$.

II.B.2) Montrer que $\mathscr{H}_n$ est stable par l'endomorphisme $\Pi_{u_n} \circ T$. On note T_n l'endomorphisme de $\mathscr{H}_n$ induit par $\Pi_{u_n} \circ T$, c'est-à-dire tel que :

$$\forall z \in \mathscr{H}_n, T_n(z) = \Pi_{u_n} \circ T(z)$$

Démontrer que, pour tout couple (z_1, z_2) de vecteurs de $\mathscr{H}_n$:

$$\langle T_n(z_1)|z_2\rangle = \langle z_1|T_n(z_2)\rangle$$

En déduire que T_n est diagonalisable.

II.B.3) *Calcul des valeurs propres de* T_n.

Soit $\omega \in \Omega$. Déterminer, par ses coordonnées dans la base $(e_0, \ldots, e_n)$, l'unique vecteur $z \in \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ tel que :

$$T(z) - \frac{z}{\omega^2} = \frac{u_n}{\sqrt{6}}$$

À quelle condition sur ω, z appartient-il à $\mathscr{H}_n$? En déduire que les valeurs propres de T_n sont les réels de la forme $\frac{1}{\omega^2}$ où ω est un zéro de la fonction ϕ_n définie à la question I.C.

II.B.4) Montrer que, pour tout $z \in \mathcal{H}_n$:

$$\langle z | T(z)\rangle \leq \frac{1}{\mu_n^2}\langle z|z\rangle \qquad (\mu_n \textit{ a été défini à la question I.C.1}).$$

II.C - Soit $z \in \mathcal{H}$. On pose :

$$z_n = \Pi_{u_n}\left(\sum_{k=0}^{n} \langle z|e_k\rangle e_k\right)$$

II.C.1) Montrer que :

$$z_n \in \mathcal{H}_n,\ \lim_{n\to\infty}\|z - z_n\|_2 = 0,\ \lim_{n\to\infty}\|T(z) - T(z_n)\|_2 = 0$$

En déduire que

$$\langle z|T(z)\rangle \leq \frac{1}{\mu^2}\langle z|z\rangle$$

II.C.2) Montrer que si C_2 est un réel tel que :

$$\forall z \in \mathcal{H},\ \langle z|T(z)\rangle \leq C_2\langle z|z\rangle$$

alors $C_2 \geq \frac{1}{\mu^2}$.

II.D - Soit $\xi \in \mathcal{A}$. Montrer que $\langle \xi'|\xi'\rangle = \langle \xi''|T(\xi'')\rangle$ et conclure.

••• FIN •••
