ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE ANNEE 2001

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES
PILOTE DE LIGNE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 2 Heures
Coefficient : 1

Le sujet comprend :

- 1 page de garde,
- 2 pages (recto-verso) d'instructions pour remplir le QCM,
- 9 pages de textes, numérotées de 1 à 9.

CALCULATRICE AUTORISEE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

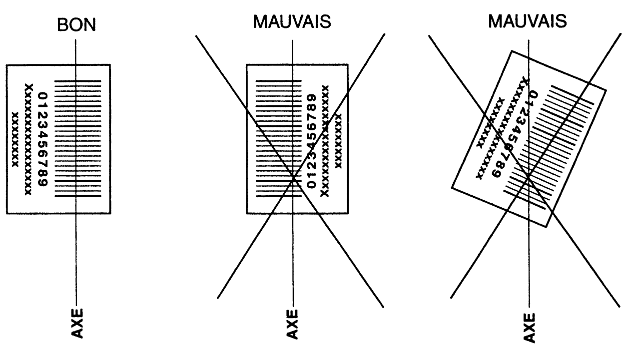
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire épreuve de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

5) Cette épreuve comporte 32 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet.
Chaque candidat devra choisir au plus 25 questions parmi les 32 proposées.

Il est inutile de répondre à plus de 25 questions : la machine à lecture optique lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'elle aura détecté des réponses à 25 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 32, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 33 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.
Pour chaque ligne numérotée de 1 à 32, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

- soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
la ligne correspondante doit rester vierge.

- soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse,
vous devez noircir l'une des cases A, B, C, D.

- soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes,
vous devez noircir deux des cases A, B, C, D et deux seulement.

- soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne,
vous devez alors noircir la case E.

En cas de réponse fausse, aucune pénalité ne sera appliquée.

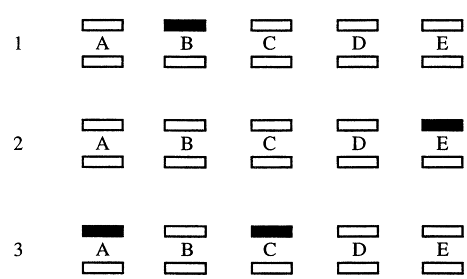
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :
A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit (-1) (-3) vaut :
A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : les racines de l'équation $x^2 - 1 = 0$ sont :
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



Questions liées : 1 à 10

11 à 19

20 à 32

- I -

On considère 3 réels u_o, v_o, w_o vérifiant $u_o > v_o > w_o > 0$ et les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies par u_o, v_o, w_o et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 3u_{n+1} &= u_n + v_n + w_n \\ 3\ln v_{n+1} &= \ln u_n + \ln v_n + \ln w_n \\ \frac{3}{w_{n+1}} &= \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n} \end{aligned}$$

1. Soit f la fonction de la variable réelle définie par $f(x) = (x+b+c)^3 - 27xbc$ où b et c sont des réels strictement positifs tels que $b \neq c$. On note f' la dérivée de f si elle existe :

   a) f' est positive sur $[-(b+c) - 3\sqrt{bc}, -(b+c) + 3\sqrt{bc}]$

   b) f' est négative sur $[b+c-3\sqrt{bc}, b+c+3\sqrt{bc}]$

   c) f est maximum en $b+c-3\sqrt{bc}$

   d) f est minimum en $-(b+c) + 3\sqrt{bc}$

2. Dans le cas où $-(b+c) + 3\sqrt{bc} < 0$, le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ est :

   a) $27bc(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2$

   b) $(b+c)^3$

   Dans le cas où $-(b+c) - 3\sqrt{bc} \geq 0$, le minimum de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ est :

   c) 0

   d) $27[(b+c) + \sqrt{bc}(3-bc)]$

3. La fonction f

   a) n'admet pas de minimum sur $\mathbb{R}_+$

   b) a un minimum négatif ou nul sur $\mathbb{R}_+$

   et on a :

   c) $\forall a > 0 \quad (a+b+c)^3 - 27abc > 0$

   d) $\forall a > 0 \quad (a+b+c)^3 - 27abc < 0$

4. Supposant u_n, v_n, w_n réels strictement positifs pour n entier fixé, on obtient en prenant $b = v_n$ et $c = w_n$

   a) $u_{n+1} < v_{n+1}$

   b) $u_{n+1} > w_{n+1} > 0$

   en prenant $b = \dfrac{1}{v_n}$ et $c = \dfrac{1}{w_n}$

   c) $u_{n+1} > v_{n+1}$

   d) $v_{n+1} > w_{n+1} > 0$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

   a) $v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n + v_n + w_n}$

   b) $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n w_n}$

   c) $u_{n+1} w_{n+1} - v_{n+1}^2 = \dfrac{u_n v_n w_n (u_n + v_n + w_n)}{u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n} - u_n v_n w_n$

   d) $u_{n+1} w_{n+1} - v_{n+1}^2 = \dfrac{u_n v_n w_n (u_n + v_n + w_n)}{u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n} - (u_n^2 v_n^2 w_n^2)^{1/3}$

6. La quantité $A_n = u_{n+1} w_{n+1} - v_{n+1}^2$ peut, pour tout n entier, s'exprimer sous la forme $A_n = B_n [u_n v_n w_n (u_n + v_n + w_n)^3 - (u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n)^3]$ où B_n s'écrit :

   a) $B_n = \dfrac{(u_n v_n w_n)^2}{(u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n)^3}$

   b)

$$B_n = \frac{(u_n v_n w_n)^{2/3}}{u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n} \frac{1}{(u_n v_n w_n)^{2/3}(u_n + v_n + w_n)^2 + (u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n)^2 + (u_n v_n w_n)^{1/3}(u_n + v_n + w_n)(u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n)}$$

   c) $B_n = \dfrac{(u_n v_n w_n)^{2/3}}{u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n} \dfrac{1}{(u_n v_n w_n)^{2/3}(u_n + v_n + w_n)^2 + (u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n)^2}$

   d) $B_n = \dfrac{(u_n + v_n + w_n)^2}{(u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n)^3}$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme $u_n v_n w_n (u_n + v_n + w_n)^3 - (u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n)^3 = C_n$ peut s'écrire :

a) $C_n = -(u_n w_n - v_n^2)[v_n^2 u_n w_n + v_n(u_n^3 + w_n^3) + u_n^2 w_n^2]$

b) $C_n = (u_n w_n - v_n^2)[-u_n^2 v_n w_n + u_n(v_n^3 + w_n^3) - v_n^2 w_n^2]$

et le signe de A_n est, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

c) égal au signe de $u_n w_n - v_n^2$ donc au signe de $u_o w_o - v_o^2$

d) opposé au signe de $u_n w_n - v_n^2$

8. La suite (u_n) est :

a) décroissante car $(v_n - u_n) + (w_n - u_n) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) croissante car $u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

et la suite (w_n) est :

c) décroissante car $u_n(v_n - w_n) + v_n(u_n - w_n) < 0$

d) croissante car $w_{n+1} - w_n = \dfrac{u_n(v_n - w_n) + v_n(u_n - w_n)}{u_n v_n + u_n w_n + v_n w_n} > 0$

9. Les suites (u_n) et (w_n) sont :

a) convergentes car elles sont toutes deux croissantes et majorées

b) convergentes car elles sont adjacentes puisque l'on a aussi

$u_{n+1} - w_{n+1} < \frac{2}{3}(u_n - w_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

et les 3 suites (u_n) ; (v_n) et (w_n)

c) sont convergentes mais de limites différentes car $u_n > v_n > w_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

d) sont convergentes et ont même limite car $u_n \leq v_n \leq w_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

10. Dans le cas particulier où $u_o w_o = v_o^2$, la suite (v_n) a pour limite, si elle converge :

a) 0

b) $\sqrt{u_o v_o}$

et dans le cas particulier où $u_o w_o > v_o^2$, la suite (v_n) est :

c) adjacente à la suite (u_n)

d) adjacente à la suite (w_n)

- II -

Soit la fonction f de la variable réelle x définie par $f(x) = (1+\sin x)^{\operatorname{cotan} x}$

11. $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :
   a) $e^{(\operatorname{cotan} x)\ln(1+\sin x)}$
   b) $\ln[e^{(1+\sin x)\ln(\operatorname{cotan} x)}]$
   c) $\ln[(1+\sin x)\ln(\operatorname{cotan} x)]$
   d) $e^{\ln(1+\sin x)\ln(\operatorname{cotan} x)}$

12.
   a) La fonction $x \to \sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$, il en est donc de même pour f.
   b) La fonction $x \to \operatorname{cotan} x$ est π - périodique, il en est donc de même pour f.
   c) f est définie en O car $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{cotan} x = -\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$
   d) f est π - périodique car $\operatorname{cotan}(\pi - x) = \operatorname{cotan} x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$

13. La fonction f est définie ou prolongeable par continuité au point :
   a) $\dfrac{\pi}{2}$
   b) 0

   f n'est pas définie ou n'est pas prolongeable par continuité au point :

   c) $\dfrac{3\pi}{2}$
   d) π

14. Si f est prolongeable par continuité en ces points alors on peut poser :
   a) $f(0) = -1$
   b) $f(2\pi) = -e$
   c) $f(2\pi) = \dfrac{1}{e}$
   d) $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 1$

On considère la fonction g définie sur $E = \left]0, \pi\right[\cup \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ par $g(x) = (\operatorname{cotan} x)\ln(1 + \sin x)$

15.

a) La fonction g est prolongeable par continuité sur $[0, 2\pi]$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}} g(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to \pi} g(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -1$

16. On a pour tout x appartenant à E :

a) $(\operatorname{cotan} x)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

b) $[\ln(1 + \sin x)]' = \dfrac{-\cos x}{1 + \sin x}$

c) $[\ln(\operatorname{cotan} x)]' = -\dfrac{1}{\sin 2x}$

d) $\dfrac{\sin 2x}{2(1 + \sin x)} \operatorname{cotan} x = 1 - \sin x$

17. La fonction g est dérivable sur E et :

a) $g'(x) = \dfrac{\sin 2x}{2(1 + \sin x)}(1 + 2\sin x)$

b) g est monotone sur E

c) g n'est pas bornée sur E

d) $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

18.

a) La fonction $\ln(1 + \sin x)$ n'admet pas de développement limité à l'ordre 2 au point $\frac{\pi}{2}$ car le nombre dérivé de cette fonction est indéterminé en ce point.

b) La fonction $\operatorname{cotan} x$ admet un développement limité au moins à l'ordre 2 au point $\frac{\pi}{2}$.

Si la fonction g admet un développement limité au moins à l'ordre 2 de la forme $g(x) = \alpha + \beta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\varepsilon(x)$ alors :

c) $\beta = -\ln 2$

d) $\alpha = -1$

19.

a) La fonction f n'est pas dérivable sur E.

Si la fonction f est dérivable sur E, sa dérivée est de la forme :

b) $f'(x) = \dfrac{f(x)}{\sin^2 x}$

c) $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{\sin^2 x} f(x)$

d) $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\sin^2 x} f(x)$

- III -

On admet que, si f est une fonction continue dans un intervalle $[a, b]$ à valeurs réelles, dérivable dans $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

20. Soit g une fonction à valeurs réelles, définie, continue, 2 fois dérivable dans l'intervalle $[a, b]$ et vérifiant $g(a) = g(b) = 0$.

Soit $x_o \in]a, b[$ et g_1 la fonction définie sur $[a, b]$ par $g_1(x) = g(x) - \dfrac{A}{2}(x-a)(x-b)$

où $A = \dfrac{2g(x_o)}{(x_o - a)(x_o - b)}$ alors il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que :

a) $A = \dfrac{g''(\alpha)}{2}$

b) $A = g'(\alpha)$

c) $A = g''(\alpha)$

d) $g''_1(\alpha) = 0$

Soit h une fonction 2 fois dérivable dans $[a, b]$ telle qu'il existe 2 nombres m et M vérifiant $\forall x \in [a, b]$ $m \le h''(x) \le M$

21. Pour tout $\forall x \in [a, b]$ on a :

a) $m\dfrac{(x-a)(x-b)}{2} \le h(x) - h(a)\dfrac{x-b}{a-b} - h(b)\dfrac{x-a}{b-a} \le M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$

b) $M\dfrac{(x-a)(x-b)}{2} \le h(x) - h(a)\dfrac{x-a}{b-a} - h(b)\dfrac{x-b}{a-b} \le m\dfrac{(x-a)(x-b)}{2}$

c) $M\dfrac{(x-a)(x-b)}{4} \le h(x) - h(a)\dfrac{x-b}{a-b} - h(b)\dfrac{x-a}{b-a} \le m\dfrac{(x-a)(x-b)}{4}$

d) $M\dfrac{(x-a)(x-b)}{2} \le h(x) - h(a)\dfrac{x-b}{a-b} - h(b)\dfrac{x-a}{b-a} \le m\dfrac{(x-a)(x-b)}{2}$

22. On obtient l'encadrement :

a) $-M\frac{(b-a)^3}{12} \leq \int_a^b h(x)dx - \frac{b-a}{2}(h(a)+h(b)) \leq -m\frac{(b-a)^3}{12}$

b) $-m\frac{(b-a)^3}{12} \leq \int_a^b h(x)dx - \frac{b-a}{2}(h(b)+h(a)) \leq -M\frac{(b-a)^3}{12}$

c) $M\frac{(a-b)^3}{12} \leq \int_a^b h(x)dx \leq m\frac{(a-b)^3}{12}$

d) $M\frac{(a-b)^3}{24} \leq \int_a^b h(x)dx - \frac{b-a}{2}(h(a)+h(b)) \leq m\frac{(a-b)^3}{24}$

23. On peut appliquer ces résultats à la fonction $\ln x$ sur l'intervalle $[n, n+1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

a) car $\ln x$ est une fonction 2 fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}+$
et on obtient alors l'encadrement :

b) $\frac{1}{12(n+1)^2} \leq \left(n+\frac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln n) \leq \frac{1}{12n^2}$

c) $\frac{1}{12n^2} \leq \left(n+\frac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln n) - 1 \leq \frac{1}{12(n+1)^2}$

d) $-\frac{1}{12n^2} \leq 1 - (n+1)\ln(n+1) + n\ln n^2 + \ln(\sqrt{n}\sqrt{n+1}) \leq -\frac{1}{12(n+1)^2}$

On pose pour tout entier naturel n non nul $u_n = \ln(n^{n+1/2}e^{-n}) - \ln(n!)$ et pour tout entier $n \geq 2$ $v_n = u_n + \frac{1}{12(n-1)}$

24. La suite (u_n) vérifie :

a) $u_{n+1} - u_n \leq -\frac{1}{12(n+1)^2}$

b) (u_n) est croissante et majorée

c) $(u_{n+1} - u_n) \geq \frac{1}{12(n+1)^2}$

d) (u_n) est décroissante et convergente

25. Si la suite (u_n) est convergente alors la suite (v_n) est :

a) décroissante et non minorée

b) convergente de limite commune avec la suite (u_n)

c) convergente car les 2 suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

d) croissante

26. De manière générale :
   a) toute suite positive et décroissante est convergente
   b) toute suite négative non majorée est divergente
   c) toute suite monotone non bornée est convergente
   d) toute suite négative majorée par une suite divergente converge

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ $I_n = \int_o^{\pi/2} \sin^n x dx$

27.
   a) $I_1 = 0$
   b) $I_1 = 1$
   c) $I_n - I_{n-1} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
   d) I_n existe car toute fonction définie sur un segment est intégrable sur ce segment

28. La suite (I_n) vérifie :
   a) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \forall n \geq 2$
   b) $I_n = n(n-1)I_{n-2}, \forall n \geq 2$
   c) $I_n = \frac{n}{n-1} I_{n-2}, \forall n \geq 2$
   d) $I_n = n(n-1)I_{n-1}, \forall n \geq 1$

29. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$
   a) $I_{2n+1} = 0$
   b) $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$
   c) $I_{2n+1} = \frac{(2n+1)......3}{2n......2}$
   d) $I_n = n! I_o$ et $I_o = \frac{\pi}{2}$

30. On obtient pour $n \in \mathbb{N}^*$

a) $(2n+2)! > I_{2n} > (2n-2)!$

b) $1 > \dfrac{[(2n)!]^2 n}{2^{4n}(n!)^4}\pi > \dfrac{2n}{2n+1}$

c) $\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} < I_{2n} < \dfrac{2^{2(n-1)}[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}$

d) $\dfrac{(2n-1)!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2} < I_{2n} < \dfrac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}$

31. Soit l la limite de la suite (u_n) si elle existe.

Un équivalent de $\dfrac{1}{I_{2n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$ est :

a) $\dfrac{e^{-2l}}{2}$

b) 0

c) e^{-2l}

d) $\dfrac{e^{-l}}{\pi}\sqrt{2n}$

32. La limite l de la suite (u_n) est égale à :

a) $+\infty$

b) $\ln\sqrt{2\pi}$

c) $-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2}{\pi}$

d) $\ln\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$