

Concours Centrale - Supélec 2001

Épreuve : PHYSIQUE

Filière PSI

Les différentes parties de ce problème sont dans une large mesure indépendantes. Seules les argumentations précises et concises seront prises en compte en réponse aux questions qualitatives.

Partie préliminaire

Un télémètre est un dispositif (figure 1) permettant de mesurer des distances.

Il est constitué d'un émetteur et d'un récepteur supposés petits et très proches l'un de l'autre. L'émetteur envoie à l'instant t_1 une impulsion qui, après propagation à la célérité c et réflexion sur un obstacle, revient vers le télémètre et est détectée par le récepteur à l'instant t_2 .

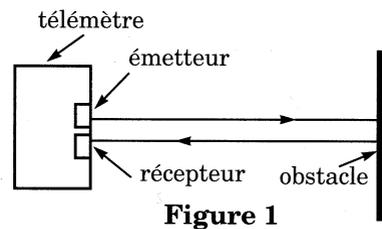


Figure 1

- Déterminer la distance L entre le télémètre et l'obstacle, en fonction des données.
- Sur l'enregistrement de la figure 2 (où l'unité de temps est la milliseconde), sont visualisés le signal de commande de l'émetteur (signal 1) et la réponse du récepteur (signal 2), synchronisés sur la même origine de temps.

On donne $c = 345 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Déterminer la valeur numérique de L .

Dans ce problème, on se propose d'étudier les caractéristiques d'un télémètre à ultrasons pour lequel l'émetteur et le récepteur sont des lames de quartz possédant des propriétés piézo-électriques.

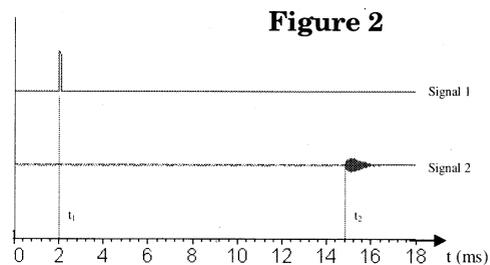


Figure 2

Partie I - Mesure de la célérité d'une onde ultrasonore

Soumise à une différence de potentiel sinusoïdale de fréquence $f_0 = 40,00 \text{ kHz}$, soit $U(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t)$, une lame de quartz vibre et transmet son mouvement

aux couches d'air environnantes ; la lame émet ainsi une onde ultrasonore sinusoïdale, de même fréquence f_0 , que l'on suppose plane et qui se propage suivant l'axe Ox avec la célérité c . La lame de quartz est placée à l'abscisse $x = 0$. L'air est supposé non visqueux, de masse volumique au repos ρ_0 , de coefficient de compressibilité isentropique $\chi_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$. L'influence de la pesanteur est négligée. À l'instant t , la vitesse de la tranche d'air d'abscisse x s'écrit :

$$v(x, t) = v_0 \cos 2\pi f_0 \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

La pression P et la masse volumique ρ fluctuent sinusoïdalement autour de leurs valeurs moyennes respectives P_0 (pression de l'air lorsqu'il est au repos) et ρ_0 , et se mettent respectivement sous la forme : $P = P_0 + p(x, t)$ et $\rho = \rho_0 + \mu(x, t)$.

I.A - Définir l'approximation acoustique.

I.B - Exprimer :

I.B.1) à partir de l'équation d'Euler, la surpression acoustique $p(x, t)$ en fonction de ρ_0 , c et $v(x, t)$;

I.B.2) à partir de l'équation de conservation de la masse, l'expression de $\mu(x, t)$ en fonction de ρ_0 , c et $v(x, t)$;

I.B.3) une relation entre χ_s , ρ_0 , $\mu(x, t)$ et $p(x, t)$.

On notera bien que les résultats demandés font intervenir les fonctions $v(x, t)$, $\mu(x, t)$, $p(x, t)$ et non leurs dérivées.

I.C - En déduire l'expression de la célérité c en fonction de χ_s et ρ_0 .

I.D - L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M , à la température T_0 . Déterminer la valeur c_{GP} de la célérité c en fonction de M , T_0 , de la constante des gaz parfaits R et du coefficient $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$.

Application numérique : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$, $M = 29,0 \text{ g}$, $T_0 = 293 \text{ K}$, $\gamma = 1,40$. Calculer c_{GP} et la longueur d'onde λ de l'onde ultrasonore.

I.E. - À l'abscisse x , on place un récepteur qui délivre une tension électrique $U_r(t)$ proportionnelle à la vitesse $v(x, t)$ de l'onde ultrasonore en x : on peut donc poser $U_r(t) = Gv(x, t)$. On relève sur un oscilloscope les tensions $U(t)$ et $U_r(t)$.

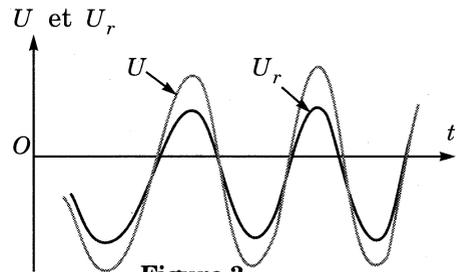


Figure 3

I.E.1) En déplaçant le récepteur, on constate que les tensions $U(t)$ et $U_r(t)$ sont en phase pour différentes valeurs de x (figure 3).

On repère ainsi une coïncidence de phase des signaux $U(t)$ et $U_r(t)$ pour une certaine abscisse x_0 (coïncidence n° 0) ; puis on relève les abscisses des points où surviennent les nouvelles coïncidences : on note ainsi que la coïncidence n° 3 a lieu à l'abscisse $x_3 = (2,6 \pm 0,1)$ cm tandis que la coïncidence n° 103 se produit à l'abscisse $x_{103} = (88,9 \pm 0,1)$ cm.

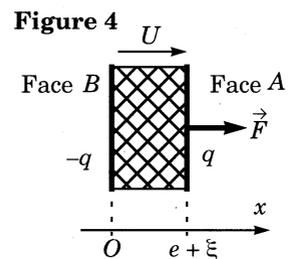
Calculer la longueur d'onde λ de l'onde ultrasonore en justifiant le nombre de chiffres significatifs qui sera retenu. En déduire la valeur de la célérité c de l'onde. En partant de cette valeur et en utilisant le modèle du gaz parfait de la question I.D, déterminer la température T à laquelle l'expérience a été menée. Citer quelques causes d'erreur qui peuvent entraîner une différence entre cette température T et la température T_0 mesurée par un bon thermomètre.

I.E.2) On constate que l'amplitude de la tension U_r diminue lorsque x augmente. Justifier cette observation expérimentale (si plusieurs explications sont apportées, essayer de les classer par ordre d'importance).

Partie II - Effet piézo-électrique

On considère une lame de quartz, cylindrique, de section S constante, d'axe Ox (de vecteur unitaire \vec{u}_x), dont les deux faces A et B en regard sont métallisées (figure 4).

La face B est fixée à l'abscisse $x = 0$. Au repos, l'épaisseur de la lame vaut e , et ses faces ne sont pas chargées. En présence de sollicitations extérieures (soit une différence de potentiel $U = U_A - U_B$ appliquée entre les faces, soit une force $\vec{F} = Fu_x$ appliquée sur la face A , soit les deux simultanément) :



- l'épaisseur de la lame subit une petite variation ξ avec $|\xi| \ll e$ et prend la valeur $e + \xi$.
- les faces A et B acquièrent respectivement les charges q et $-q$, réparties uniformément sur leur surface (il s'agit de charges réelles, libres, distinctes des charges dues à la polarisation du quartz).

L'état de la lame est alors caractérisé par le couple de variables (q, ξ) . On suppose de plus que les vecteurs champ électrique \vec{E} , déplacement électrique \vec{D} et polarisation \vec{P} sont uniformes (colinéaires à l'axe Ox), dans la lame, et nuls à l'extérieur de la lame.

II.A - Polarisation électrique

On impose dans cette question $\xi = 0$ (faces A et B fixées). D'un point de vue électrique, le quartz se comporte comme un diélectrique parfait de permittivité relative ϵ_r et l'ensemble {lame + faces métallisées} constitue un condensateur de capacité C . On applique aux bornes de la lame une différence de potentiel constante $U_1 = U_A - U_B$, il apparaît respectivement des charges q et $-q$ sur les faces A et B , et un champ électrique \vec{E}_1 dans la lame.

II.A.1) Donner les expressions des vecteurs déplacement électrique \vec{D}_1 et polarisation \vec{P}_1 dans la lame en fonction de ϵ_r , de la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 et de \vec{E}_1 .

II.A.2) Établir une seconde expression de \vec{D}_1 en fonction de q , S et \vec{u}_x .

II.A.3) Donner l'expression de \vec{E}_1 en fonction de U_1 , e et \vec{u}_x .

II.A.4) En déduire la valeur de la capacité C en fonction de S , e , ϵ_r et ϵ_0 .

II.A.5) Application numérique : on donne $\epsilon_r = 4,5$; $\epsilon_0 = 8,84 \times 10^{-12} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$; $S = 20 \text{mm}^2$; $e = 1,0 \text{mm}$. Calculer C .

II.B - Polarisation mécanique

En fait, le quartz, comme certains autres cristaux est piézo-électrique : une contrainte mécanique faisant varier l'épaisseur de la lame produit également une polarisation électrique dans le cristal. On impose dans cette question $q = 0$ (faces A et B isolées). Une force $\vec{F} = Fu_x$ appliquée sur la face A , fait varier l'épaisseur de la lame de e à $(e + \xi)$ et fait apparaître la polarisation $\vec{P}_2 = P_2u_x$ dans la lame. On admet la relation linéaire $P_2 = h\xi$ (h désigne une constante positive caractéristique de la lame de quartz).

II.B.1) Quelle est la valeur du vecteur déplacement électrique \vec{D}_2 dans la lame ? En déduire la relation liant P_2 et le champ électrique \vec{E}_2 dans la lame.

II.B.2) Déterminer la différence de potentiel U_2 qui est apparue entre les faces A et B de la lame et la mettre sous la forme $U_2 = \alpha\xi$. Exprimer α en fonction de h , e et ϵ_0 . Dans le cas général ($q \neq 0$, $\xi \neq 0$), les champs et potentiels des

questions précédentes se superposent. De plus, une étude mécanique montrerait une relation entre F , q et ξ de la même forme. On admet donc pour la suite du problème les relations linéaires :

$$\begin{cases} U = \frac{q}{C} + \alpha \xi \\ F = \beta q + k \xi \end{cases}$$

(β et k désignant deux constantes positives caractéristiques de la lame de quartz).

II.C - Aspect énergétique

II.C.1) Un opérateur applique la force $\vec{F} = Fu_x$ sur la face A , et un générateur applique la différence de potentiel U entre les faces de la lame. Exprimer, pour des variations élémentaires respectives dq et $d\xi$ de q et ξ , la variation $d\mathcal{E}_L$ de l'énergie de la lame de quartz en fonction du travail δW_{op} fourni par l'opérateur et du travail δW_G fourni par le générateur. Exprimer ensuite $d\mathcal{E}_L$ en fonction de F , U , dq et $d\xi$.

II.C.2) La lame est initialement au repos ($q = 0, \xi = 0$), on pose $\mathcal{E}_L = 0$ dans cet état. Les faces A et B étant isolées, l'opérateur appuie lentement sur la face A pour faire passer l'épaisseur de la lame de e à $(e + \xi)$. Calculer l'énergie \mathcal{E}_{L1} de la lame à la fin de cette déformation élastique supposée réversible, en fonction de k et ξ .

II.C.3) Tout en maintenant l'épaisseur de la lame à la valeur $(e + \xi)$ précédente, on ajuste la différence de potentiel aux bornes de la lame de telle sorte que la charge de la face A atteigne la valeur q . Calculer l'énergie \mathcal{E}_L de la lame à la fin de cette seconde transformation en fonction de \mathcal{E}_{L1} , q , C , α et ξ , puis en fonction de k , q , C , α et ξ .

II.C.4) L'énergie $\mathcal{E}_L(q, \xi)$ est une fonction d'état des variables q et ξ , on admet que l'expression trouvée en II.C.3) est valable quelle que soit la transformation considérée. En déduire une nouvelle expression de $d\mathcal{E}_L$ et en déduire que $\alpha = \beta$.

II.D - Application numérique :

on donne $k = 1,7 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $\alpha = 4,2 \times 10^9 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

II.D.1) Évaluer le produit $\alpha^2 C k^{-1}$. Quelle est sa dimension ?

II.D.2) Déterminer les valeurs de ξ et q obtenues lorsqu'on applique une différence de potentiel $U = 15 \text{ V}$ entre les faces A et B de la lame en l'absence de contrainte mécanique ($F = 0$).

Partie III - Comportement dynamique des transducteurs (émetteur et récepteur)

III.A - L'émetteur

Lorsque la lame de quartz est soumise à une différence de potentiel variable $U(t)$, sans contrainte mécanique extérieure autre que le contact de l'air, on admet, dans toute la suite, que $U(t)$, $q(t)$ et $\xi(t)$ sont liées par le système d'équations :

$$\begin{cases} U = \frac{q}{C} + \alpha\xi \\ m \frac{d^2\xi}{dt^2} + \delta \frac{d\xi}{dt} + k\xi + \alpha q = 0 \end{cases}$$

Dans cette dernière équation, le coefficient m est proportionnel à la masse de la lame tandis que δ est un coefficient positif ($\delta > 0$).

III.A.1) Donner brièvement la signification du terme $\delta \frac{d\xi}{dt}$.

III.A.2) Déterminer l'équation différentielle reliant la vitesse $v(t) = \frac{d\xi(t)}{dt}$ à la différence de potentiel $U(t)$ appliquée aux bornes du quartz en introduisant les quantités :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k - \alpha^2 C}{m}} \approx \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad Q = \frac{m\omega_0}{\delta} \text{ (avec } Q \gg 1), \quad H_0 = \frac{-\alpha C}{m\omega_0}.$$

III.A.3) On suppose que $U(t)$ est un échelon de tension d'amplitude E , le cristal de quartz étant initialement au repos. Montrer que la solution $v(t)$ de cette équation peut se mettre sous la forme :

$$v(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega'_0 t)$$

et donner les expressions de τ et ω'_0 en fonction de Q et ω_0 . On ne cherchera pas à déterminer la constante A . Dans toute la suite, on pourra supposer $\omega'_0 \approx \omega_0$.

III.A.4) On définit le temps de réponse τ_E de l'émetteur comme le temps au bout duquel le signal est inférieur à 5% de sa valeur initiale. Exprimer τ_E .

III.A.5) Quelle fonction de transfert complexe $\underline{H}(\omega) = v/U$ peut-on associer à l'équation différentielle de la question III.A.2, en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω ? On exprimera \underline{H} en fonction de H_0 , Q , ω_0 et ω . Quelle est la nature du filtre de fréquences correspondant?

III.B - Récepteur

Réciproquement, lorsque la lame de quartz est soumise à une onde ultrasonore qui impose à l'une de ses faces de vibrer à la vitesse $v'(t)$, on recueille une différence de potentiel $U'(t)$ telle que, en régime sinusoïdal établi, on puisse écrire, en notation complexe : $\underline{K}(\omega) = \underline{U}'/\underline{v}'$, où la fonction de transfert $\underline{K}(\omega)$ a une expression analogue à celle de la fonction \underline{H} de la question III.A.5) dans laquelle on a simplement remplacé H_0 par le coefficient réel et constant K_0 , les valeurs de Q et de ω_0 étant les mêmes que pour l'émetteur.

III.B.1) Donner l'équation différentielle reliant $U'(t)$ et $v'(t)$.

III.B.2) On considère un récepteur recevant l'onde émise par un émetteur sollicité par un échelon de tension, de la forme :

$$v'(t) = B e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_0 t).$$

Que devient l'équation différentielle précédente ?

III.B.3) On suppose que, dans cette question, Q est infini (pour l'émetteur et le récepteur). Vérifier que l'équation ci-dessus s'écrit :

$$\frac{d^2 U'}{dt^2} + \omega_0^2 U' = K_0 \omega_0^2 B \cos(\omega_0 t).$$

Déterminer la constante U'_0 telle que $U'_\infty(t) = U'_0 \omega_0 t \sin(\omega_0 t)$ soit solution de cette équation.

III.B.4) La solution générale de l'équation obtenue en III.B.2) est assez compliquée. On admettra que, pour Q suffisamment grand mais fini, cette solution peut pratiquement se mettre sous la forme :

$$U'(t) \approx U'_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \omega_0 t \sin(\omega_0 t)$$

avec les valeurs de τ , U'_0 et ω_0 trouvées précédemment. Déterminer la valeur t_0 de t correspondant au maximum de l'amplitude de l'enveloppe de ce signal.

III.B.5) Application numérique : on a relevé figure 5 un tel signal $U'(t)$, l'unité de temps étant la microseconde.

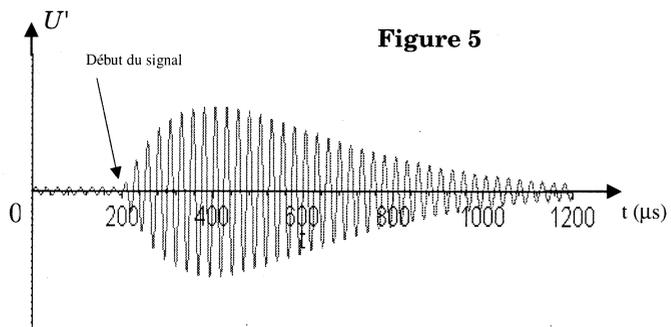
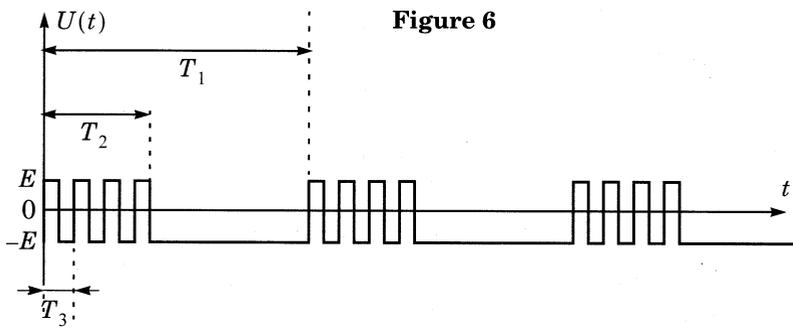


Figure 5

- a) Évaluer l'ordre de grandeur de la fréquence $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ et du facteur Q .
- b) On définit le temps de réponse τ_R comme le temps au bout duquel le signal $U'(t)$ devient inférieur à 5% de sa valeur maximale. Évaluer τ_R en fonction de τ (une réponse à un seul chiffre significatif suffira). Comparer τ_R et τ_E (défini à la question III.A.4).
- c) En admettant qu'avec une électronique simple, l'instant t_2 coïncidant avec le début du retour de l'écho est déterminé à τ près et qu'il n'y a pas d'autre source d'erreur, donner l'incertitude absolue sur la mesure d'une distance $L = 2,2$ m. On prendra $c = 345 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Commenter brièvement la précision obtenue.

Partie IV - Application à la télémétrie

IV.A - Le choix de la tension d'alimentation



En pratique, l'amplitude du signal reçu par le récepteur diminue lorsque la distance télémètre-obstacle augmente (cf question I.E.2). Pour pouvoir mesurer de grandes distances, il faut augmenter la puissance transmise à l'émetteur. Pour y arriver, on l'excite périodiquement par des salves d'impulsions. La figure 6 représente une tension d'excitation comportant 3 salves de 4 impulsions (les échelles de temps ne sont pas respectées). On note T_3 la période des impulsions, T_2 la durée d'une salve et T_1 la période des salves.

IV.A.1) Détermination de T_3 :

- a) On considère la fonction de transfert complexe $\underline{H}(\omega) = \underline{v}/\underline{U}$ de l'émetteur établie à la question III.A.5 en régime sinusoïdal forcé. Déterminer le module $H = |\underline{H}|$ en fonction de H_0 , Q , ω_0 et ω . Pour quelle valeur de ω la fonction $H(\omega)$ est-elle maximale? Quelle est la valeur H_{max} de ce maximum? Entre quelles valeurs ω_1 et ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) de la pulsation, $H(\omega)$ est-elle supérieure à $H_{max}/\sqrt{2}$? Calculer $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ en fonction de Q et de ω_0 .
- b) Tracer l'allure de H en fonction de la pulsation ω pour $Q = 25$.

c) Pour toute la suite du problème on choisit $T_3 = \frac{1}{f_0}$. Expliquer pourquoi la réponse en vitesse $v(t)$ de la face A de la lame de quartz au signal $U(t)$ de la figure 6 est pratiquement la même (à un facteur $\frac{4}{\pi}$ près) que si les salves de durée T_2 étaient constituées de portions de sinusoides d'expression $E \sin \omega_0 t$ (pour celle qui débute en $t = 0$).

IV.A.2) Détermination de T_2 . On admet que le régime transitoire correspondant à la salve du signal $U(t)$ débutant à $t = 0$, est de la forme :

$$v(t) = \frac{4H_{max} E}{\pi} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \sin(\omega_0 t)$$

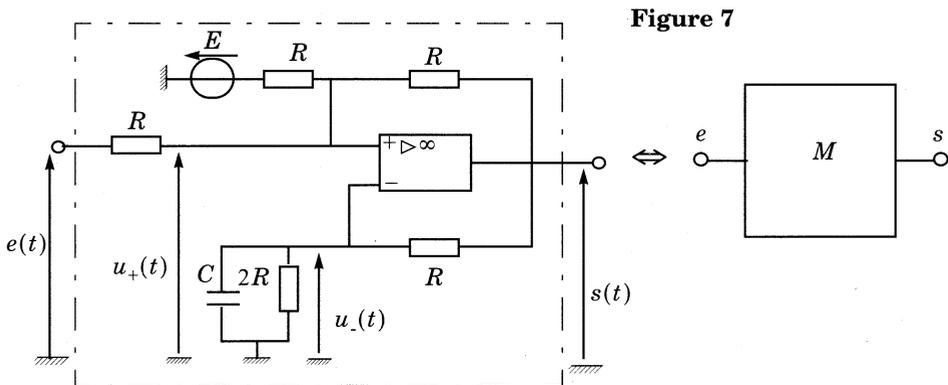
Dans cette expression, τ est la constante de temps de la lame définie à la question III.A.3. Dessiner l'allure de l'enveloppe de ce régime transitoire dans le cas où $f_0 = 40,00$ kHz, $Q = 25$ et $T_2 = 2\tau$ (valeur qui sera conservée par la suite). Pourquoi est-il peu intéressant de prendre $T_2 > 2\tau$?

IV.A.3) Détermination de T_1 . Déterminer la valeur minimale de T_1 permettant de mesurer toutes les distances dans l'intervalle $[0, L_{max}]$ sans ambiguïté. Calculer la valeur numérique de T_1 pour $L_{max} = 10$ m et $c = 345$ m · s⁻¹.

IV.B - Le circuit d'alimentation

Les amplificateurs opérationnels utilisés sont considérés comme idéaux. Ils fonctionnent en régime de saturation. Les tensions de saturation en sortie sont notés $+E$ et $-E$ ($E > 0$).

IV.B.1) Oscillateur commandé : on considère le montage M de la figure 7.



a) Déterminer la tension $u_+(t)$ en fonction de $e(t)$, $s(t)$ et E .

b) Fonctionnement en mode bloqué : on suppose $e(t) = -E$. Montrer, qu'en régime établi indépendant du temps, la tension de sortie $s(t)$ conserve toujours la même valeur que l'on déterminera.

c) Fonctionnement en mode multivibrateur : on suppose $e(t) = +E$.

i) Montrer que la tension de sortie $s(t)$ ne peut garder une valeur constante (E ou $-E$) en régime établi.

ii) Déterminer l'équation différentielle liant $u_-(t)$ à $s(t)$. On posera $\tau_a = \frac{2}{3}RC$.

iii) On choisit l'origine des temps telle que $u_-(0) = -\frac{E}{3}$ et $s(0) = +E$.

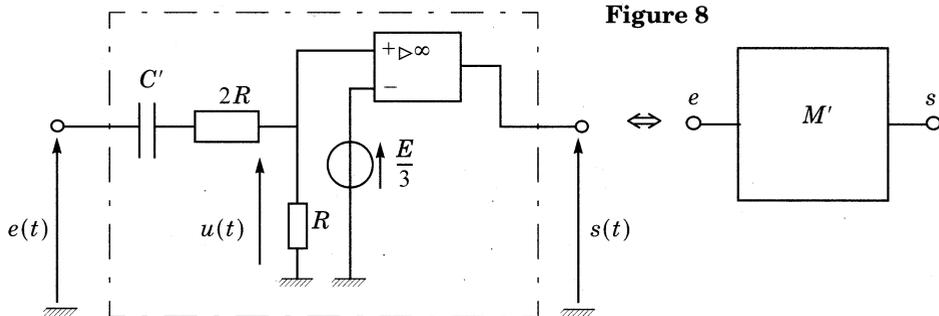
Résoudre l'équation différentielle et donner l'expression de $u_-(t)$ pour $u_-(t) < \frac{E}{3}$.

Que se passe-t-il à l'instant où $u_-(t_0) = \frac{E}{3}$? Que se passe-t-il après ?

iv) Tracer soigneusement, pour une période du signal de sortie, les graphes de $u_-(t)$ et $s(t)$.

v) En déduire la période T de $s(t)$ en fonction de τ_a .

IV.B.2) Générateur d'impulsions : on considère le montage M' de la figure 8.



a) On suppose que la tension $e(t)$ est constante. Montrer le montage possède, en régime établi (indépendant du temps), un seul état stable, et donner la valeur de $s(t)$ correspondante.

b) Déterminer, en régime variable, l'équation différentielle liant $u(t)$ à $e(t)$. On posera $\tau_m = 3RC'$.

c) On suppose qu'à l'instant $t = 0^-$, $e(0^-) = -E$ et que le régime établi est atteint. À l'instant $t = 0$, l'entrée bascule et $e(t)$ prend la valeur $e(0^+) = +E$. Déterminer la valeur de la discontinuité ($u(0^+) - u(0^-)$) de la tension $u(t)$ à l'instant $t = 0$.

d) Déterminer l'évolution de $u(t)$ à partir de cet instant.

e) La tension d'entrée $e(t)$ est un signal rectangulaire symétrique prenant les valeurs $+E$ et $-E$, de période T' . Tracer soigneusement sur le même graphe, pour $T' = 10 \tau_m$ et pendant une période de $e(t)$, les tensions $e(t)$, $u(t)$ et $s(t)$.

f) Donner la largeur T_2' des impulsions de sortie correspondantes en fonction de τ_m .

IV.B.3) Association des circuits précédents.

a) Montrer comment, en combinant en série un circuit M_1 de type M , un circuit M' et un second circuit M_2 de type M , on peut réaliser les salves décrites sur la figure 6.

b) Application numérique : on prend $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ pour tous les circuits. Avec les notations de la figure 6 on prend $T_1 = 60 \text{ ms}$, $T_2 = 0,40 \text{ ms}$ et $T_3 = 25 \text{ ms}$. Déterminer les valeurs numériques qu'il faut donner aux différentes capacités (C_1 pour M_1 , C' pour M' et C_2 pour M_2).

••• FIN •••
