ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière STI).

CONCOURS D'ADMISSION 2001

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE
Filière PSI

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
(L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2-Filière PSI.

Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objet de ce problème est l'étude de l'équation différentielle suivante :

$$E_\lambda : \qquad x\,y'' + (1-x)\,y' - \lambda\,y = 0.$$

où la fonction y est une fonction inconnue deux fois continûment dérivable de la variable x et λ un réel donné.

PREMIÈRE PARTIE

I-1. Solution de l'équation différentielle définie sur toute la droite réelle :

Il est admis qu'il existe une fonction f_λ, somme d'une série entière de rayon de convergence R, strictement positif, prenant la valeur 1 en 0, ($f_\lambda(0) = 1$), solution dans l'intervalle $]-R, R[$ de l'équation différentielle E_λ. Cette fonction est définie par la relation :

$$f_\lambda(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

a. Déterminer les coefficients a_n, $n \geq 1$, en fonction de l'entier n et du réel λ. Préciser les fonctions f_1, f_0, f_{-1}, f_{-2}.

Tournez la page S.V.P.

b. Pour quelles valeurs du réel λ la fonction f_λ est-elle un polynôme ? Préciser son degré en fonction de la valeur $-p$ donnée au réel λ et le coefficient du terme de plus haut degré (le terme dominant).

c. Quel est le rayon de convergence R de la série entière de terme général $a_n\, x^n$, $n \geq 1$, lorsque le réel λ est différent des valeurs obtenues précédemment ?

Il est admis, dans la suite, que la fonction f_λ est la seule fonction, développable en série entière sur toute la droite réelle, qui soit solution de l'équation différentielle E_λ et qui prenne la valeur 1 en 0.

I-2. Solution de l'équation différentielle E_1 :
Dans cette question le réel λ est égal à 1 :

$$E_1 : \qquad x\, y'' + (1-x)\, y' - y = 0.$$

a. Déterminer la solution générale f_1 de l'équation différentielle E_1 sur la demi-droite $]0,\infty[$, exprimer cette solution à l'aide de fonctions usuelles et de la fonction définie sur la demi-droite $]0,\infty[$, par la relation

$$x \longmapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

b. Déterminer de même la solution générale de l'équation différentielle E_1 sur la demi-droite $]-\infty, 0[$.

c. Déterminer enfin les fonctions solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle E_1.

I-3. Relation entre les fonctions f_λ :
Étant donné un réel λ, soit g_λ la fonction définie sur la droite réelle $\mathbf{R}$ par la relation suivante :

$$g_\lambda(x) = e^x\, f_\lambda(-x).$$

a. Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par la fonction g_λ.

b. En déduire, en admettant que le produit de deux fonctions réelles développables en série entière sur la droite réelle $\mathbf{R}$ est encore une fonction développable en série entière sur la droite réelle $\mathbf{R}$, que, pour tous réels λ et x, il vient :

$$f_{1-\lambda}(x) = e^x f_\lambda(-x).$$

c. Préciser, lorsque p est un entier strictement positif, les fonctions f_p. En déduire les fonctions f_2 et f_3.

d. Soit p un entier donné supérieur ou égal à 1 ($p \geq 1$) ; quelle est, lorsque le réel x croît indéfiniment, la limite de l'expression ci-dessous :

$$\frac{f_{p+1}(x)}{x\, f_p(x)} \; ?$$

I-4. Application à une équation aux dérivées partielles :

Soit Ω le sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^3$, rapporté à un repère Oxyz, obtenu en retranchant de $\mathbf{R}^3$ le plan *Oxy* :

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \mid (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,;\, z \neq 0\right\}.$$

Soit F une fonction inconnue, définie dans l'ouvert Ω, vérifiant l'équation aux dérivées partielles (P) suivante :

$$(P) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{r}{z}\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1}{4r^2}F = 0.$$

Il a été posé dans cette relation :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Comment y a-t-il lieu de choisir le réel λ pour que la fonction F définie dans l'ouvert Ω par la relation suivante

$$F(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{r}} f_\lambda(r),$$

soit solution de l'équation aux dérivées partielles (P) ?

SECONDE PARTIE

L'objet de cette seconde partie est l'étude de certaines propriétés de la fonction $f_{1/2}$. Dans ce but soit φ la fonction, définie pour tout réel x, par la relation suivante :

$$\varphi(x) = \int_0^{\pi/2} e^{x \sin^2\theta} d\theta.$$

Étant donné un entier naturel p, soit I_p l'intégrale définie par la relation suivante :

$$I_p = \int_0^{\pi/2} \sin^{2p}\theta \, d\theta.$$

II-1. Détermination de l'intégrale I_p :

Établir une relation entre les intégrales I_p et I_{p+1}. En déduire la valeur de l'intégrale I_p.

II-2. Relation entre les fonctions φ et $f_{1/2}$:

a. Démontrer que la fonction φ est définie et continue sur toute la droite réelle $\mathbf{R}$. Est-elle plusieurs fois continûment dérivable ?

b. Déterminer le développement en série entière de la fonction φ sur un intervalle $]-R, R[$. En déduire qu'elle est proportionnelle à la fonction $f_{1/2}$. Préciser le coefficient de proportionnalité.

Tournez la page S.V.P.

II-3. Encadrements de $\varphi(x)$:

a. Démontrer que, pour tout réel u strictement inférieur à 1 ($u < 1$), l'inégalité ci-dessous existe :

$$e^u \leq \frac{1}{1-u}.$$

b. Soit x un réel strictement inférieur à 1 ($x < 1$) ; soit $J(x)$ l'intégrale définie par la relation suivante :

$$J(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 - x \sin^2\theta}.$$

Calculer l'intégrale $J(x)$.

c. Déduire des résultats précédents que, pour tout réel x strictement inférieur à 1 ($x < 1$), la fonction φ vérifie l'encadrement suivant :

$$0 \leq \varphi(x) \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

d. Démontrer l'existence d'une constante A strictement positive telle que pour tout réel x inférieur ou égal à -1 ($x \leq -1$), la fonction φ vérifie la minoration suivante :

$$\varphi(x) \geq \frac{A}{\sqrt{-x}}.$$

e. Démontrer que la fonction $f_{1/2}$ admet une limite lorsque le réel x tend vers $-\infty$. Préciser cette limite. Est-ce que la fonction $f_{1/2}$ est intégrable sur la demi-droite $]-\infty, -1]$?

II-4. Étude d'une fonction h :

Soit h la fonction définie sur la droite réelle par la relation :

$$h(x) = e^{-x/2} f_{1/2}(x).$$

a. Démontrer que la fonction h est paire et que la valeur de $h(x)$ est donnée par la relation suivante :

$$h(x) = k \int_0^{\pi/2} ch\left(x \frac{\cos\theta}{2}\right) d\theta.$$

où k est une constante qui sera déterminée.

b. Déterminer, lorsque le réel x croît indéfiniment, les limites des deux expressions suivantes :

$$h(x) \text{ et } \frac{h(x)}{x}.$$

c. Étudier les variations de la fonction h et tracer la courbe représentative, lorsque le réel x varie sur la droite réelle $\mathbf{R}$.

FIN DU PROBLÈME