

Concours Centrale - Supélec 2001

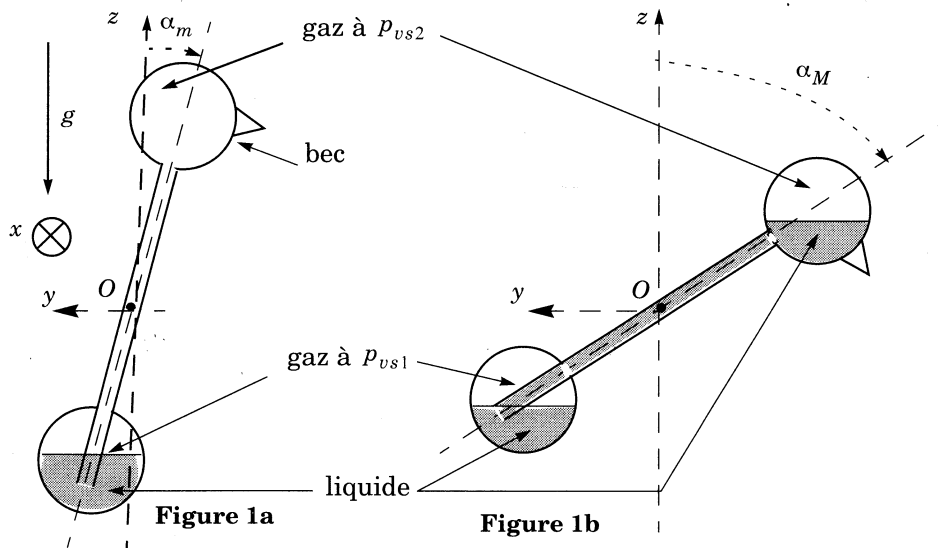
Épreuve : PHYSIQUE I

Filière PC

Sur le thème de la **physique des jouets**, cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants. Le sujet comprend un certain nombre de questions qualitatives, auxquelles on s'efforcera de répondre avec concision : quelques lignes suffisent en général. Dans tout le problème le champ de pesanteur est uniforme avec $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Partie I - Étude thermodynamique d'un jouet : l'oiseau buveur

Description : le corps de l'oiseau est un tube cylindrique fin de longueur L relié à deux réservoirs sphériques identiques, l'ensemble étant hermétiquement clos. Le tube ouvre directement sur le réservoir supérieur alors qu'il plonge presque jusqu'au fond du réservoir inférieur (cf. figure 1a). L'oiseau peut tourner autour d'une liaison pivot d'axe horizontal Ox . Il est rempli de dichlorométhane pur sous deux phases, liquide et vapeur. Le bec de l'oiseau, au contact de l'atmosphère, est recouvert d'une couche de feutre, qu'on peut imbiber d'eau liquide.



Observations : si on mouille le bec de l'oiseau avant de l'abandonner sans vitesse initiale, l'oiseau se met après un régime transitoire à osciller périodiquement entre $\alpha_m = 0,1 \text{ rad}$ et $\alpha_M = 1,1 \text{ rad}$. Au début d'une période, la phase liquide est entièrement contenue dans le réservoir du bas (cf. figure **1a**) de telle sorte que le tube plonge dans le liquide ; le niveau du liquide monte dans le tube, déplaçant ainsi le centre de gravité de l'oiseau, ce qui engendre sa rotation progressive de α_m à α_M . Puis, lorsque l'oiseau atteint α_M , le fond du tube se trouve découvert (cf. figure **1b**) et laisse passer une bulle de vapeur du bas vers le haut ; le liquide reflue alors du haut vers le bas, le réservoir du haut se vide et l'oiseau revient dans sa position initiale α_m , tout le liquide se trouvant de nouveau en bas. Le cycle peut alors reprendre et se poursuit tant que le feutre est humide. Il est possible d'assurer la pérennité des oscillations en s'arrangeant pour que l'oiseau trempe son bec dans un verre à chaque fois que $\alpha = \alpha_M$, d'où le nom du dispositif.

I.A - Pourquoi le dichlorométhane monte-t-il dans le tube ?

I.A.1) On rappelle la formule de Clapeyron reliant l'enthalpie massique de vaporisation l_v du dichlorométhane, et la pente dp_{vs}/dT de la courbe de pression de vapeur saturante :

$$l_v = T(v_V - v_L) \frac{dp_{vs}}{dT}.$$

a) Que représentent v_V et v_L dans cette formule ? Dans la suite, on traite la vapeur comme un gaz parfait de masse molaire M et on suppose que $v_L \ll v_V$. Faut-il être près ou loin du point critique pour valider cette approximation ?

b) Exprimer la pente dp_{vs}/dT au voisinage de T_0 en fonction de l_v , R , T_0 , $p_{vs}(T_0)$, M , puis la calculer numériquement pour

$$l_v = 406 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}, M = 85 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}, R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1},$$

$$T_0 = 293 \text{ K} \text{ et } p_{vs}(T_0) = 4,1 \times 10^4 \text{ Pa}.$$

I.A.2) Dans cette question on suppose pour simplifier que le tube est fixe et vertical. Du fait de l'évaporation de l'eau sur le feutre, le récipient du haut est à une température $T_0 - \theta$ légèrement inférieure à la température $T_0 = 293 \text{ K}$ du récipient du bas. Le liquide monte dans le tube jusqu'à une hauteur d'équilibre h_{eq} .

On suppose pour simplifier que le niveau de la surface libre dans le réservoir du bas reste quasiment constant car le tube est très fin (cf. figure 2).

a) Établir l'expression de h_{eq} en fonction de θ , g , de la masse volumique $\mu = 1,3 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ du dichlorométhane liquide et de la pente dp_{vs}/dT évaluée en I.A.1b.

b) Calculer la valeur numérique de θ nécessaire pour que le dichlorométhane atteigne le réservoir du haut c'est-à-dire pour que h_{eq} soit supérieur à la longueur $L = 3 \text{ cm}$ du tube. Dans la suite, on adopte la valeur $\theta = 0,4 \text{ K}$ qui donne de la marge.

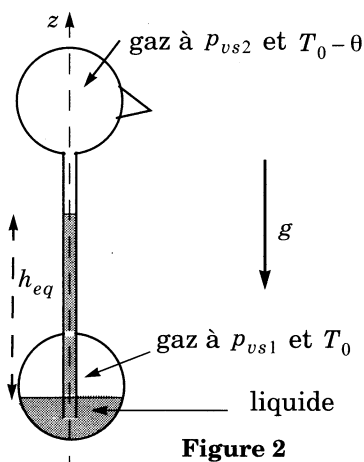


Figure 2

I.B - Pourquoi le récipient supérieur reste-t-il froid ?

On envisage le système fermé constitué initialement de l'oiseau et de l'eau liquide qui imbibe son bec au début d'une phase d'ascension. À la fin de l'ascension, un volume $\Delta V_f = 0,1 \text{ cm}^3$ de dichlorométhane liquide est monté dans le récipient supérieur, sa température diminuant de $\theta = 0,4 \text{ K}$ et une masse Δm_e d'eau liquide est passée à l'état de vapeur dans l'atmosphère qui impose sa pression constante p . On suppose que le reste du système n'a pas évolué. On rappelle la valeur $L = 3 \text{ cm}$ de la longueur du tube.

I.B.1) Exprimer la variation d'enthalpie ΔH du système en fonction de ΔV_f , Δm_e , θ , de l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau $l_{ve} = 2,6 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$, de la masse volumique $\mu = 1,3 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ du dichlorométhane liquide et de sa capacité thermique massique $c_p = 1,0 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

I.B.2) On néglige les échanges thermiques avec l'extérieur et le travail du poids. On admet que l'évaporation de l'eau équivaut à une évolution à la pression constante p imposée par l'atmosphère. Justifier que $\Delta H = 0$. En déduire la valeur numérique de Δm_e , ainsi que le volume ΔV_e d'eau liquide correspondant. Commenter, sachant que la surface du feutre imbibé vaut $S \approx 1 \text{ cm}^2$. Dans la suite on adopte la valeur $\Delta m_e = 10^{-7} \text{ kg}$, ce qui donne de la marge.

I.B.3) Évaluer l'ordre de grandeur du travail de pesanteur et justifier qu'on peut effectivement le négliger.

I.C - Pourquoi l'eau s'évapore-t-elle sur le feutre ?

L'eau se répartit entre la phase liquide qui imbibe le bec en feutre et la phase gazeuse où elle constitue un mélange idéal de gaz parfaits avec l'air. On admet que l'enthalpie libre totale du système fermé constitué de l'eau répartie entre les deux phases et de l'air dans la phase gazeuse s'écrit :

$$G = G^\circ(T) + n_a RT \left(x \ln \left(\frac{xp}{p_{vse}} \right) - x \right)$$

où n_a est le nombre de moles d'air supposé constant, x la fraction molaire en vapeur d'eau dans la phase gazeuse, p_{vse} la pression de vapeur saturante de l'eau à la température T et p la pression atmosphérique.

I.C.1) On admet que G est le potentiel thermodynamique à pression et température fixées. Rappeler ce que cela signifie.

I.C.2) Étudier les variations de $G(x)$ et tracer l'allure de son graphe pour $0 \leq x \leq 1$. Sachant que $p = 1,0 \times 10^5$ Pa et $p_{vse} = 2,5 \times 10^3$ Pa, en déduire la valeur numérique de x à l'équilibre. L'équilibre est-il stable ?

I.C.3) À quelle condition numérique sur x l'eau qui imbibe le feutre du bec peut-elle s'évaporer dans l'air ?

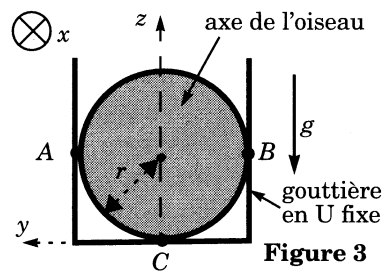
I.C.4) Si on enferme l'oiseau sous une cloche hermétique, on constate que l'oiseau finit par cesser d'osciller, bien que son bec soit encore mouillé. Interpréter.

I.D - L'oiseau buveur vu comme un moteur ditherme

On assimile l'oiseau à une machine ditherme où le dichlorométhane évolue de manière cyclique au contact d'une source chaude (l'atmosphère à $T_0 = 293$ K au niveau du récipient inférieur) et d'une source froide (l'eau imbibant le feutre à $T_0 - \theta$ avec $\theta = 0,4$ K).

I.D.1) Justifier brièvement que le travail de pesanteur sur un cycle est nul.

I.D.2) Il existe des forces de frottements solide subies par l'oiseau, dont on se propose d'évaluer le travail W pour un cycle. L'axe de l'oiseau, assimilé à un cylindre de rayon $r = 1$ mm est posé sur une gouttière (G) en U fixe, de telle sorte que le contact se fasse le long des droites Ax et Bx sans frottement et le long de la droite Cx avec un coefficient de frottement de glissement $f = 0,1$



le long de la droite Cx avec un coefficient de frottement de glissement $f = 0,1$ (cf. figure 3). Compte tenu de l'invariance par translation le long de \vec{u}_x les actions de contact sont équivalentes à trois forces \vec{R}_A , \vec{R}_B et $\vec{R}_C = F\vec{u}_y + N\vec{u}_z$

appliquées respectivement en A , B et C ; on admet de plus que $N = mg$ où $m = 0,1 \text{ kg}$ est la masse de l'oiseau.

a) Exprimer $|F|$ en fonction des données et préciser le signe de F selon que α croît ou décroît.

b) Tracer le graphe du moment total \mathcal{M} des actions exercées par le support sur l'oiseau par rapport à l'axe Ox en fonction de α pour un cycle complet de fonctionnement entre $\alpha_m = 0,1 \text{ rad}$ et $\alpha_M = 1,1 \text{ rad}$.

c) En déduire la valeur numérique du travail W et commenter son signe.

I.D.3) Dans la suite, on envisage un oiseau idéalisé, pour lequel on aurait réussi à supprimer les frottements et à récupérer intégralement le travail W calculé en I.D.2.c). Au cours d'un cycle, le dichlorométhane « reçoit » de la source froide une chaleur Q_F et la source froide maintient sa température constante en évaporant réversiblement une masse $\Delta m_e = 10^{-7} \text{ kg}$ d'eau à pression constante, de telle sorte que $Q_F = -\Delta m_e l_{ve}$ où $l_{ve} = 2600 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ est l'enthalpie de vaporisation de l'eau. En déduire numériquement la chaleur Q_C fournie par la source chaude au dichlorométhane à chaque cycle, puis la valeur numérique du rendement thermodynamique ρ de ce moteur ditherme.

I.D.4) Donner sans justification l'expression du rendement de Carnot ρ_C en fonction de T_0 et θ , puis le calculer numériquement. Commenter.

I.D.5) Évaluer numériquement l'entropie créée S_c au sein de la machine pour un cycle. Commenter.

Partie II - Étude mécanique d'un jouet simulant la marche à pied

La marche d'un être humain est une activité complexe au cours de laquelle des mouvements cycliques des membres inférieurs entraînent une translation vers l'avant. Le but du problème est d'approcher par des modèles simples le fonctionnement d'un jouet marcheur en bois représenté sur la figure 4 : une fois lancé, ce jouet marche tout seul en oscillant latéralement de

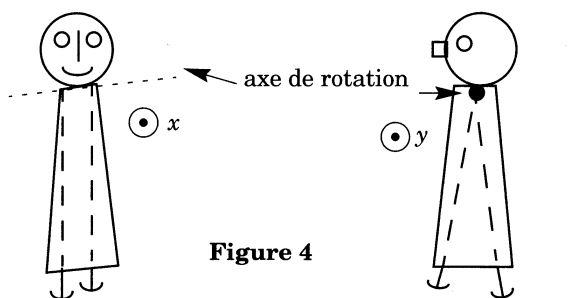


Figure 4

Vue de face : le jouet oscille latéralement pour libérer alternativement chaque jambe

Vue de côté : le jouet roule sans glisser alternativement sur chaque pied à bord sphérique pendant que l'autre pied pendule librement autour de l'axe

manière à permettre alternativement à chaque

« jambe » munie d'un pied en forme de calotte sphérique de quitter le sol puis d'assurer le contact.

II.A - Modélisation de la marche sur un plan horizontal

Modèle : le jouet est assimilé à un point matériel C de masse m et à deux barres modélisant les jambes, de même longueur $CA_1 = CA_2 = R$ articulées sans frottement en leur sommet C , (cf. figure 5 en annexe page 6/6, où on a représenté une seule jambe (i) avec $i = 1$ ou $i = 2$). Ces barres sont terminées par deux arcs de cercles de centre C et de demi-angle au sommet $\alpha_0 = 0,2$ rad modélisant les pieds (l'angle α_0 est exagéré sur les figures). Chaque ensemble pied + jambe constitue un solide de masse $m' \ll m$, de centre d'inertie G_1 ou G_2 avec $CG_1 = CG_2 = a$, de moment d'inertie J' par rapport à l'axe Cy .

On admet que les oscillations latérales (dandinement) ont comme seul effet, de permettre à un ensemble jambe-pied de penduler sans frottement autour de l'axe Cy pendant que l'autre pied roule sans glisser sur le sol : cela revient à raccourcir de manière infinitésimale la jambe libre (cf. figure 6b en annexe page 6/6, où le raccourcissement de la jambe (2) est exagéré). Le pied libre prend le relais de l'autre pied au bout d'une demi-période τ_0 du cycle de fonctionnement. Chaque pied prend alors la suite du précédent et C se déplace quasiment en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse Vu_x , ce qu'on ne cherchera pas à justifier.

Le fonctionnement du système est décrit sur les figures 6a, 6b et 6c, en annexe page 6/6, où le sens du déplacement de C est vers la gauche.

- à $t = 0$ (cf. figure 6a), les vitesses angulaires des deux jambes ont une même valeur positive et le pied (1) commence à assurer le contact.
- pour $0 < t < \tau_0$ (cf. figure 6b), le pied (1) roule sans glisser au contact du sol ; le pied (2) ne touche pas le sol et pendule librement autour de Cy . On repère les mouvements des deux jambes par les angles θ_1 et θ_2 des vecteurs \vec{CG}_1 et \vec{CG}_2 avec la verticale descendante $-\vec{u}_z$ et on limite les calculs à l'ordre un en θ_1 et θ_2 .
- à $t = \tau_0$ (cf. figure 6c), le pied (2) commence à assurer le contact et le pied (1) devient libre, ce changement des rôles des pieds se faisant sans discontinuité des vitesses angulaires.

II.A.1) Mouvement de la jambe (1) assurant le contact entre 0 et τ_0 .

a) Exprimer le vecteur-rotation instantané du solide (jambe + pied) (1), puis la vitesse du point I_1 appartenant au pied (1) et au contact du sol en fonction de θ_1 , V et R . En déduire la condition de roulement sans glissement du pied (1) sur le sol.

b) En déduire l'expression de l'angle $\theta_1(t)$ de la jambe (1) par rapport à la verticale en fonction de α_0 , R , V , t sachant que $\theta_1(t=0) = -\alpha_0$.

c) En déduire la condition reliant V , R , α_0 et τ_0 pour qu'on ait $\theta_1(t = \tau_0) = \alpha_0$.

II.A.2) Mouvement de la jambe libre (2) entre 0 et τ_0 . Du fait que C est quasiment en mouvement rectiligne uniforme, le référentiel $(Cxyz)$ est supposé galiléen. On suppose que pour $0 < t < \tau_0$, le pied (2) ne touche pas le sol (cf. figure **6b**).

a) Établir l'équation différentielle dont est solution l'angle $\theta_2(t)$ de la jambe (2) par rapport à la verticale en faisant apparaître comme seule constante $\omega_2 = \sqrt{m'ga/J'}$.

b) Expliciter $\theta_2(t)$ dans l'hypothèse des petites oscillations, pour les conditions initiales $\theta_2(t=0) = \alpha_0$ et $\dot{\theta}_2(t=0) = V/R$. Exprimer l'amplitude θ_{2max} des oscillations en fonction de α_0 , V , R et ω_2 .

c) Quelle équation doit satisfaire le produit $\omega_2\tau_0$ pour que le fonctionnement du jouet corresponde à la description de l'énoncé ? On tiendra compte aussi de la relation établie en II.A.1.c). Dans la suite on adopte la solution numérique approchée $\omega_2\tau_0 \approx 4$. Vérifier qu'alors $\theta_{2max} \approx 1,1\alpha_0$.

II.A.3) Mouvements sur plusieurs périodes. Comparer la demi-période des oscillations de la jambe libre et la demi-période τ_0 d'un cycle de fonctionnement. Représenter sur le même graphique les évolutions de $\theta_1(t)$ et de $\theta_2(t)$ pour $0 \leq t \leq 3\tau_0$. On admettra que $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ s'annulent aux mêmes instants.

II.A.4) Étude des actions de contact. On se propose dans cette question d'étudier les actions de contact \vec{F}_1 et \vec{F}_2 exercées par le sol sur le jouet aux points de contact I_1 ou I_2 (cf. figure **5**), qu'on suppose de la forme $\vec{F}_1 = T_1\vec{u}_x + N_1\vec{u}_z$ et $\vec{F}_2 = T_2\vec{u}_x + N_2\vec{u}_z$. On limite les calculs à l'ordre un en θ_1 , θ_2 et leurs dérivées successives.

a) Exprimer la quantité de mouvement \vec{P} du jouet complet (corps et jambes) dans le référentiel lié au sol en fonction des données et de $\theta_2(t)$ pour $0 < t < \tau_0$. En déduire que

$$\frac{d\vec{P}}{dt} \approx m'a\omega_2^2\theta_2(t)\vec{u}_x.$$

b) En déduire les expressions de T_1 et N_1 pour $0 < t < \tau_0$. Que valent aux mêmes instants T_2 et N_2 ?

c) Tracer l'allure des graphes de $T_1(t)$ et $T_2(t)$ sur la même figure pour $0 < t < 3\tau_0$.

d) Soit f le coefficient de frottement. À quelle condition le roulement sans glissement est-il assuré ? Déduire du modèle un ordre de grandeur de la valeur minimale du coefficient f pour qu'un être humain puisse marcher sans glisser. On utilisera $\theta_{2max} \approx 1,1\alpha_0 \approx 0,22$ rad et on introduira de façon explicite des valeurs numériques pertinentes pour m' , m , a et ω_2 .

e) Indiquer brièvement en quoi les graphes de la question II.A.4.c) peuvent ou ne peuvent pas décrire les actions de contact dans le cas de la marche d'un être humain.

II.A.5) Aspects énergétiques

a) En faisant un bilan énergétique pour le jouet complet sur une période, montrer soigneusement que le travail des forces intérieures au jouet est nul.

b) En réalité, le jouet ne marche à vitesse constante que sur un plan incliné descendant. Expliquer qualitativement.

c) Quelle différence entre l'être humain et le jouet explique que le premier puisse marcher sur un plan horizontal et même gravir une côte ?

II.B - Modélisation de l'entretien de la marche sur un plan incliné descendant

Les pieds du jouet sont en réalité beaucoup plus petits que ceux du modèle de la partie II.A, ce qui impose à chaque pas un choc inélastique avec le sol. Le but de cette partie est de prendre en compte ce défaut, tout en adoptant un nouveau modèle plus sommaire pour le jouet. Le jouet est assimilé à un solide inhomogène (S) de centre d'inertie C dont toute la masse m est concentrée au point C . Autour de ce point, partent des « rayons solides » CP_k avec $1 \leq k \leq N$, de masse négligeable, régulièrement répartis en faisant entre eux des angles $2\alpha_0$ (cf. figure 7 où on n'a tracé que trois rayons pour alléger la figure). Les points P_k sont situés sur le cercle immatériel de centre C et de rayon R représenté en pointillés sur la figure 7.

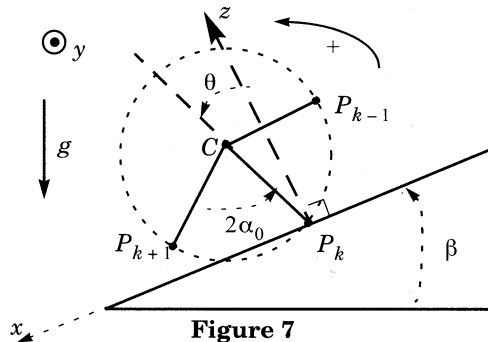


Figure 7

On se propose d'analyser le mouvement saccadé de (S) dans des conditions telles que l'énergie perdue au cours des chocs soit exactement compensée par la descente sur un plan incliné d'angle β . On prendra garde au fait que le mouvement de C dans cette partie n'est plus ni rectiligne ni uniforme.

On se propose d'analyser le mouvement saccadé de (S) dans des conditions telles que l'énergie perdue au cours des chocs soit exactement compensée par la descente sur un plan incliné d'angle β . On prendra garde au fait que le mouvement de C dans cette partie n'est plus ni rectiligne ni uniforme.

Hypothèses :

- on note $\vec{\Omega}_y$ le vecteur rotation de (S) dans son mouvement par rapport au référentiel R lié au sol ;
- lorsque P_k arrive à l'instant t_k au contact du plan incliné, un choc se produit ; juste avant le choc de P_k on a $\Omega = \Omega_k^-$ et juste après on a $\Omega = \Omega_k^+ \neq \Omega_k^-$;

- puis, le point de contact P_k ne glisse pas : (S) pivote autour de P_k jusqu'au contact de P_{k+1} .

II.B.1) **Étude d'un choc.** La figure 8 représente les rayons utiles CP_k et CP_{k-1} à l'instant t_k où le contact en P_k prend le relais du contact en P_{k-1} . Dans cette question, on ne fera aucune approximation sur $\cos\alpha_0$ ou $\sin\alpha_0$.

a) On se place à l'instant t_k^- où c'est P_{k-1} qui assure le contact. Déterminer la norme et la direction du vecteur-vitesse de C puis exprimer la composante selon \vec{u}_y du moment cinétique du jouet au point P_k .

b) On se place à l'instant t_k^+ où c'est P_k qui assure le contact. Déterminer le vecteur-vitesse de C et exprimer la composante selon \vec{u}_y du moment cinétique du jouet au point P_k .

c) On admet la conservation de la composante selon \vec{u}_y du moment cinétique du jouet au point P_k au cours du choc. En déduire que le rapport $u = \Omega_k^+ / \Omega_k^-$ ne dépend que de α_0 et donner son expression. Vérifier la pertinence du résultat en examinant un cas limite pour α_0 .

II.B.2) **Mouvement entre deux chocs.** On note θ l'angle $(\vec{u}_z, \overrightarrow{P_k C})$ tant que P_k est le point de contact (cf. figure 7). L'origine $t = 0$ des temps est prise au moment où P_k entre en contact ; on note τ_0 l'instant où P_k quitte le plan incliné pour céder la place à P_{k+1} . On se donne

$$\Omega_k^+(t = 0) = \Omega_0.$$

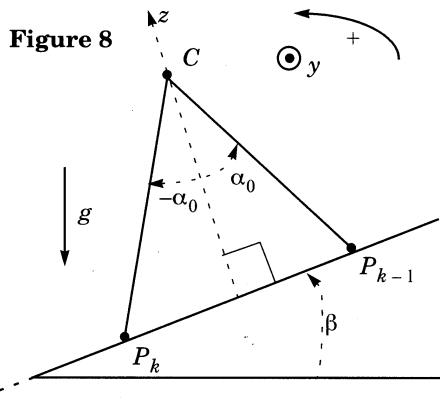
On souhaite obtenir une rotation périodique de (S) c'est-à-dire retrouver après chaque choc la même vitesse angulaire $\Omega_k^+ = \Omega_0$.

a) En utilisant une méthode énergétique, donner une intégrale première du mouvement puis l'équation différentielle du deuxième ordre dont $\theta(t)$ est solution. On fera apparaître comme seules constantes β et $\omega_0 = \sqrt{g/R}$.

b) Linéariser cette équation en supposant β et θ petits, puis donner la forme générale de la solution $\theta(t)$ en introduisant deux constantes d'intégration A et B .

c) Établir deux équations permettant de déterminer A et B en fonction de Ω_0 , α_0 et ω_0 sans chercher à les résoudre.

d) En utilisant notamment le résultat de II.B.1.c, établir deux autres conditions à $t = \tau_0$ pour que le mouvement soit effectivement périodique.



II.B.3) **Condition d'un mouvement périodique.** Tous calculs effectués on obtient alors l'expression de la valeur particulière Ω_{0c} de Ω_0 permettant un mouvement périodique :

$$\Omega_{0c} = \sqrt{\frac{4\beta\alpha_0 u^2 \omega_0^2}{(1-u^2)}} \text{ qu'on ne demande pas d'établir.}$$

a) Vérifier la pertinence de l'expression de Ω_{0c} en examinant des cas limites pour les paramètres β et u .

b) On suppose que la vitesse angulaire initiale est voisine mais différente de Ω_{0c} . Dans ces conditions on obtient avec un bilan énergétique qu'on ne demande pas de faire la vitesse angulaire après le $k+1^{\text{ième}}$ choc :

$$\Omega_{k+1}^2 = u^{2k}\Omega_0^2 + (1-u^{2k})\Omega_{0c}^2$$

Que peut-on en conclure quant à la stabilité du régime périodique ?

Annexes

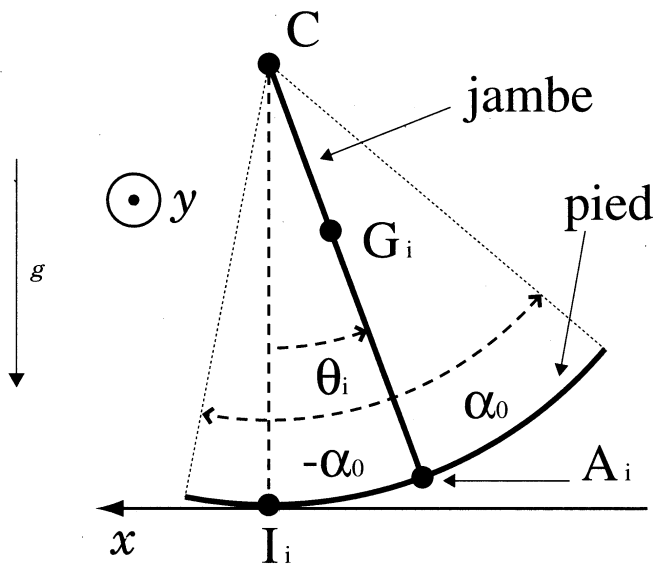
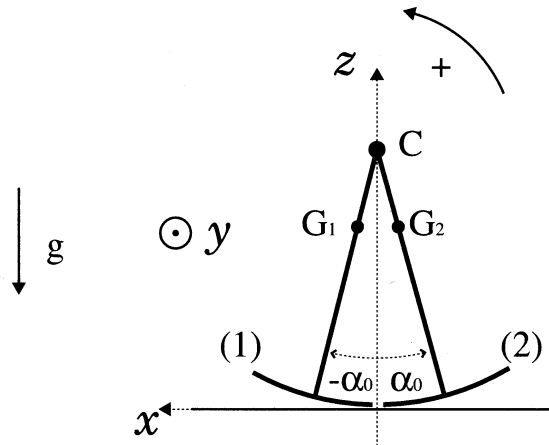
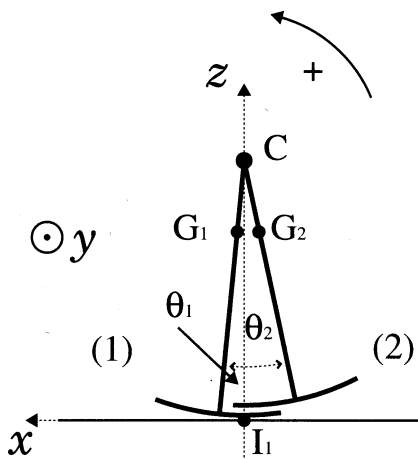
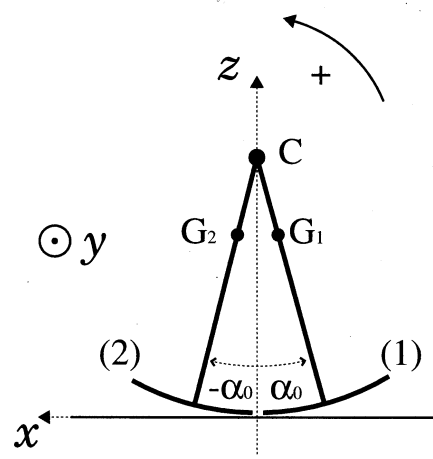


Figure 5

Modèle de solide « jambe + pied » avec $i = 1$ ou 2 (échelles non respectées) ; la jambe et le pied sont solidaires.

Figure 6a : $t = 0$ Figure 6b : $0 < t < \tau_0$ Figure 6c : $t = \tau_0$

••• FIN •••
