ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2001 **FILIÈRE PC**

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Les propriétés démontrées dans ce problème ont des applications à la mécanique classique et quantique et à l'optique géométrique.

⋆⋆⋆

Pour tout entier $p \geqslant 1$, on désigne par $\mathcal{M}_p$ l'espace vectoriel des matrices réelles à p lignes et p colonnes, et l'on désigne par I_p la matrice unité de $\mathcal{M}_p$. Si $M \in \mathcal{M}_p$, on note $\underline{M}$ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^p$ de matrice M dans la base canonique. La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$. On note $(\ |\ )$ le produit scalaire canonique et $\|\ \|$ la norme euclidienne de $\mathbf{R}^p$.

Pour tout entier pair $n = 2m$, on considère la matrice $J \in \mathcal{M}_{2m}$ définie par blocs par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} .$$

Première partie
Matrices symplectiques

1. On fixe l'entier pair $n = 2m$. On appelle *matrice symplectique* toute matrice $M \in \mathcal{M}_{2m}$ telle que

$${}^tM\, J\, M = J .$$

a) Que peut-on dire du déterminant d'une matrice symplectique ?

b) L'ensemble des matrices symplectiques est-il un groupe pour la multiplication ?

c) La matrice J est-elle symplectique ?

d) La transposée d'une matrice symplectique est-elle symplectique ?

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

2. On écrit toute matrice $M \in \mathcal{M}_{2m}$ par blocs, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, où $A, B, C, D \in \mathcal{M}_m$.

a) Montrer que la matrice M est symplectique si et seulement si les matrices A, B, C, D vérifient les conditions

$$\begin{cases} {}^tAC \quad \text{et} \quad {}^tBD \quad \text{sont symétriques}, \\ {}^tAD - {}^tCB = I_m . \end{cases}$$

b) Montrer que si D est inversible, il existe $Q \in \mathcal{M}_m$ telle que $M = \begin{pmatrix} I_m & Q \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - QC & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$.

En déduire que, si M est symplectique et D inversible, alors $\det M = 1$.

c) Soient $B, D \in \mathcal{M}_m$ telles que ${}^tBD$ est symétrique. On suppose qu'il existe $s_1, s_2 \in \mathbf{R}$, $s_1 \neq s_2$, et $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^m$ tels que $(\underline{D} - s_1\underline{B})v_1 = 0$ et $(\underline{D} - s_2\underline{B})v_2 = 0$. Montrer que le produit scalaire $(\underline{D}v_1 \,|\, \underline{D}v_2)$ est nul.

d) On suppose que M est symplectique. Montrer que tout $v \in \mathbf{R}^m$ tel que $\underline{D}v = 0$ et $\underline{B}v = 0$ est nul. Montrer qu'il existe $s \in \mathbf{R}$ tel que $D - sB$ est inversible. En déduire que $\det M = 1$. [On pourra introduire la matrice $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -sI_m & I_m \end{pmatrix}$ et vérifier qu'elle est symplectique.]

3. Soit M une matrice symplectique et soit P son polynôme caractéristique.

a) Montrer que, $\forall \lambda \in \mathbf{C},\ \lambda \neq 0,\ P(\lambda) = \lambda^{2m} P\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

b) Montrer que si $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ est valeur propre de M, de multiplicité d, alors $\dfrac{1}{\lambda_0}$, $\overline{\lambda_0}$, $\dfrac{1}{\overline{\lambda_0}}$ sont valeurs propres de M, chacune de multiplicité d.

c) Que peut-on dire de l'ordre de multiplicité de -1 et de 1 ?

d) On suppose dans cette question que $m = 2$. Donner des exemples de matrices symplectiques $\in \mathcal{M}_4$, diagonalisables sur $\mathbf{C}$ et ayant

(1) une seule valeur propre ;
(2) deux valeurs propres doubles distinctes ;
(3) une valeur propre double et deux valeurs propres simples ;
(4) quatre valeurs propres distinctes non réelles et de module $\neq 1$.

Dans chaque cas, dessiner les valeurs propres dans le plan complexe, sur lequel on tracera d'abord le cercle de centre 0 et de rayon 1.

e) Toute matrice symplectique est-elle diagonalisable sur $\mathbf{C}$?

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Deuxième partie
Formes symplectiques et endomorphismes symplectiques

Soit n un entier $\geqslant 1$. On appelle *forme symplectique* sur $\mathbf{R}^n$ une application $\omega : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ qui est

- bilinéaire : $\forall y \in \mathbf{R}^n$, $x \in \mathbf{R}^n \mapsto \omega(x,y) \in \mathbf{R}$ est linéaire et $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^n \mapsto \omega(x,y) \in \mathbf{R}$ est linéaire ;
- antisymétrique : $\forall x, y \in \mathbf{R}^n,\ \omega(x,y) = -\omega(y,x)$;
- non dégénérée : la condition « $\omega(x,y) = 0$ pour tout $y \in \mathbf{R}^n$ » implique $x = 0$.

4.a) Soit η un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ tel que

$$\eta^* = -\eta$$

où η^* est l'adjoint de η par rapport au produit scalaire euclidien. On pose

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n \quad , \quad \omega(x,y) = (\eta(x) \,|\, y) \ . \tag{1}$$

Montrer que ω est une forme symplectique sur $\mathbf{R}^n$ si et seulement si η est inversible.

b) Soit ω une forme symplectique sur $\mathbf{R}^n$. Montrer qu'il existe un endomorphisme η de $\mathbf{R}^n$ tel que la relation (1) soit vérifiée. Montrer que $\eta^* = -\eta$ et que η est inversible.

5. Montrer que s'il existe sur $\mathbf{R}^n$ une forme symplectique, alors n est pair.

6. On suppose dans cette question que $n = 2m$. On pose

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^{2m} \quad , \quad \omega_0(x,y) = (\underline{J}x \,|\, y) \ .$$

a) Montrer que ω_0 est une forme symplectique sur $\mathbf{R}^{2m}$.

b) Soit $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant 2m}$ la base canonique de $\mathbf{R}^{2m}$. Calculer $\omega_0(e_k, e_\ell),\ 1 \leqslant k \leqslant 2m, 1 \leqslant \ell \leqslant 2m$.

c) Soit φ un endomorphisme de $\mathbf{R}^{2m}$, et M sa matrice dans la base canonique. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x, y \in \mathbf{R}^{2m}$, $\omega_0\big(\varphi(x), \varphi(y)\big) = \omega_0(x,y)$,

(ii) la matrice M est symplectique.

Un endomorphisme de $\mathbf{R}^{2m}$ qui vérifie la propriété (i) ci-dessus est appelé *endomorphisme symplectique*.

7. Un endomorphisme φ de $\mathbf{R}^n$ est dit *stable* si, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, la suite $\Big(\|\varphi^p(x)\|\Big)_{p \in \mathbf{N}}$ est bornée, où φ^p désigne la composée de l'application φ avec elle-même p fois.

a) Montrer que si un endomorphisme φ de $\mathbf{R}^n$ a toutes ses valeurs propres distinctes et de module 1 dans $\mathbf{C}$, alors φ est stable.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\Omega \in \mathcal{M}_m$ pour que l'endomorphisme de $\mathbf{R}^{2m}$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique soit symplectique et stable.

c) Montrer que si un endomorphisme symplectique φ de $\mathbf{R}^{2m}$ possède une valeur propre dans $\mathbf{C}$ de module $\neq 1$, alors φ n'est pas stable.

8. On note $x_1, \ldots, x_{2m}$ les coordonnées de $x \in \mathbf{R}^{2m}$ dans la base canonique. On considère les ensembles $B = \{x \in \mathbf{R}^{2m} \mid \sum_{k=1}^{2m} (x_k)^2 \leqslant 1\}$,

$$C_R = \{x \in \mathbf{R}^{2m} \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant R^2\} \quad \text{et} \quad \Gamma_R = \{x \in \mathbf{R}^{2m} \mid x_1^2 + x_{m+1}^2 \leqslant R^2\} ,$$

où R est un réel strictement positif.

a) On suppose $m \geqslant 2$. Montrer que pour tout $R > 0$, il existe un endomorphisme symplectique φ de $\mathbf{R}^{2m}$ tel que $\varphi(B) \subset C_R$.

b) Soit φ un endomorphisme symplectique de $\mathbf{R}^{2m}$ et soit φ^* l'adjoint de φ par rapport au produit scalaire euclidien. Montrer que ou bien $\|\varphi^*(e_1)\| \geqslant 1$, ou bien $\|\varphi^*(e_{m+1})\| \geqslant 1$.

En déduire que, si $R < 1$, il n'existe aucun endomorphisme symplectique φ de $\mathbf{R}^{2m}$ tel que $\varphi(B) \subset \Gamma_R$.

* *
*

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .