ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2001 **FILIÈRE PC**

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Les polynômes de Legendre, fonctions de Legendre et harmoniques sphériques étudiés dans ce problème ont des applications à la détermination des équilibres de température et des distributions de charges électriques, ainsi qu'à la mécanique quantique.

⋆⋆⋆

Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbf{R}$. On identifie une fonction polynomiale avec le polynôme associé.

Première partie

Pour tout $n \in \mathbf{R}$, on considère la fonction polynomiale P_n, définie par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big((x^2-1)^n\Big)$$

pour $x \in \mathbf{R}$. Il résulte des conventions habituelles que $P_0(x) = 1$ pour $x \in \mathbf{R}$.

1.a) Montrer que le polynôme P_n est de degré n. Quel est le coefficient du terme de degré n dans P_n ?

b) Pour quelles valeurs de n la fonction P_n est-elle paire ? impaire ?

c) Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

2. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que pour tout $m \in \mathbf{N}$ tel que $0 \leqslant m \leqslant n-1$,

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, x^m \mathrm{d}x = 0\ .$$

3. On désigne par $\mathcal{E}$ l'espace préhilbertien réel des fonctions continues sur $[-1,1]$ muni du produit scalaire

$$(u\,|\,v) = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

pour $u, v \in \mathcal{E}$.

a) La famille $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle une famille orthogonale dans $\mathcal{E}$?

b) Calculer $(P_n\,|\,P_n)$ pour chaque $n \in \mathbf{N}$.

4.a) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big((x^2-1)\dfrac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}x}(x)\Big)$ est orthogonal à x^m pour tout $m \in \mathbf{N}$ tel que $0 \leqslant m \leqslant n-1$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, P_n est solution de l'équation différentielle

$$(x^2-1)y'' + 2x\,y' - n(n+1)y = 0\ .$$

Deuxième partie

5. Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit $m \in \mathbf{N}$ tel que $0 \leqslant m \leqslant n$. On pose

$$f_{n,m}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\,\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}x^m}(x)$$

pour $x \in [-1,1]$.

a) Etudier la parité des fonctions $f_{n,m}$ suivant les valeurs de n et m.

b) Montrer que $f_{n,m} \in \mathcal{E}$ et que, si $n' \in \mathbf{N}$, $n' \neq n$ et $0 \leqslant m \leqslant n'$, alors $f_{n,m}$ et $f_{n',m}$ sont orthogonales dans $\mathcal{E}$.

Dans la quatrième partie, on utilisera la propriété suivante, que l'on admettra : sur l'intervalle $]-1,1[$, la fonction $f_{n,m}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et est solution de l'équation différentielle

(E) $$(1-x^2)y'' - 2x\,y' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0\ .$$

Troisième partie

On désigne par x_1, x_2, x_3 les coordonnées canoniques de $\mathbf{R}^3$. Par définition une *fonction polynomiale* (ou *polynôme*) *homogène* sur $\mathbf{R}^3$ de degré N, où $N \in \mathbf{N}$, est une combinaison linéaire à coefficients réels de monômes $(x_1)^{i_1}(x_2)^{i_2}(x_3)^{i_3}$, où $i_1, i_2, i_3 \in \mathbf{N}$ et $i_1 + i_2 + i_3 = N$. On convient que la fonction nulle est un polynôme homogène de degré N pour tout $N \in \mathbf{N}$.

6.a) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^3$, nulle en 0, dont les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f}{\partial x_3}$ sont des fonctions polynomiales homogènes sur $\mathbf{R}^3$ de degré N. Montrer que f est une fonction polynomiale homogène de degré $N+1$.

b) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^N$ sur $\mathbf{R}^3$ qui vérifie

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^N f(x_1, x_2, x_3)$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que f est une fonction polynomiale homogène sur $\mathbf{R}^3$ de degré N.

7. Montrer que, si f est une fonction polynomiale homogène sur $\mathbf{R}^3$ de degré N,

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = N f\,.$$

8. On désigne par $\mathcal{F}_N$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes sur $\mathbf{R}^3$ de degré N. Trouver la dimension de $\mathcal{F}_N$.

9. Soit $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ le laplacien sur les fonctions sur $\mathbf{R}^3$. Une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^3$ telle que $\Delta f = 0$ est appelée *harmonique*. Soit

$$\mathcal{H}_N = \{f \in \mathcal{F}_N \,|\, \Delta f = 0\}$$

l'espace vectoriel réel des polynômes homogènes harmoniques sur $\mathbf{R}^3$ de degré N. On se propose de déterminer la dimension de $\mathcal{H}_N$, $\dim \mathcal{H}_N$.

a) Montrer que, pour $N \geqslant 2$, $\Delta(\mathcal{F}_N) \subset \mathcal{F}_{N-2}$. En déduire que

$$\dim \mathcal{H}_N \geqslant 2N+1\,.$$

b) On pose $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Soit $k \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant 2k \leqslant N$, et soit $g \in \mathcal{F}_{N-2k}$. Calculer $\Delta(r^{2k} g)$ en fonction de $g, \Delta g, r, N, k$.

10. Soit $f \in \mathcal{H}_N$, $N \geqslant 2$. On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{F}_{N-2}$ tel que $f = r^2 g$.

a) Montrer qu'il existe une fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^3$ telle que $f = r^{2K} h$, où K est la partie entière de $\dfrac{N+2}{2}$.

b) Montrer que $f = 0$.

11.a) Montrer que, si $N \geqslant 2$, $\dim \mathcal{H}_N \leqslant \dim \mathcal{F}_N - \dim \mathcal{F}_{N-2}$.

b) Quelle est la valeur de $\dim \mathcal{H}_N$?

Quatrième partie

On conserve les notations de la troisième partie. On introduit les coordonnées sphériques (r, θ, φ) sur $\mathbf{R}^3$ définies par

$$\begin{cases} x_1 = r \sin\theta \cos\varphi \\ x_2 = r \sin\theta \sin\varphi \\ x_3 = r \cos\theta \end{cases}$$

pour $r \in]0, +\infty[$, $\theta \in]0, \pi[$, $\varphi \in]0, 2\pi[$. On négligera le fait que ces coordonnées ne sont pas définies pour les points d'un demi-plan de $\mathbf{R}^3$. On écrira

$$f(x_1, x_2, x_3) = \widetilde{f}(r, \theta, \varphi)$$

(expression de f en coordonnées sphériques). Soit

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

la sphère de centre 0 et de rayon 1. On pose

$$\Delta_S = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \text{cotan}\ \theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

et l'on admettra que

$$\widetilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_S$$

est l'expression du laplacien en coordonnées sphériques, c'est-à-dire que

$$\widetilde{\Delta(f)} = \widetilde{\Delta}(\widetilde{f}) .$$

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $m \in \mathbf{N}$. On considère les fonctions sur S définies par

$$\begin{cases} 0 \leqslant m \leqslant n \quad , \quad Y_{n,m}(\theta, \varphi) = \cos(m\varphi) f_{n,m}(\cos\theta) \\ 0 < m \leqslant n \quad , \quad Y_{n,-m}(\theta, \varphi) = \sin(m\varphi) f_{n,m}(\cos\theta) \end{cases}$$

où les $f_{n,m}$ sont les fonctions étudiées dans la deuxième partie.

12. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $m \in \mathbf{Z}$ tel que $-n \leqslant m \leqslant n$,

$$\Delta_S Y_{n,m} = -n(n+1) Y_{n,m} .$$

13. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $m \in \mathbf{Z}$ tel que $-n \leqslant m \leqslant n$. Soit $H_{n,m}$ la fonction sur $\mathbf{R}^3$ telle que

$$\widetilde{H}_{n,m}(r, \theta, \varphi) = r^n Y_{n,m}(\theta, \varphi) .$$

a) Montrer que $\widetilde{\Delta}\widetilde{H}_{n,m} = 0$.

b) Montrer, en regroupant dans $\widetilde{H}_{n,m}$ les termes en $r\sin\theta\cos\varphi$, $r\sin\theta\sin\varphi$ et $r\cos\theta$, que $H_{n,m}$ est un polynôme homogène harmonique sur $\mathbf{R}^3$ de degré n.

* *
*