

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

FILIERE MP

CONCOURS D'ADMISSION 2001

## PREMIÈRE COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices est autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

## Accélérateurs linéaires

*Les trois parties du problème sont largement indépendantes*

Dans ce problème, on étudie diverses méthodes d'accélération d'ions positivement chargés par des champs électriques. On se place dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, et dans le cadre de la mécanique newtonienne. On donne :

Masse du proton	$m_p = 1,7 \times 10^{-27}$ kg
Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19}$ C
Permittivité du vide	$\epsilon_0 = 8,8 \times 10^{-12}$ SI
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ SI

**Première partie**  
**Accélérateur électrostatique**

1. Des particules de masse  $m$  et de charge  $e > 0$  sont accélérées par un champ électrique  $\vec{E}$ , supposé uniforme, régnant entre les deux armatures  $A$  et  $B$  d'un condensateur plan, distantes de  $d$ , et de potentiels  $V_A$  et  $V_B$ . Le dispositif est représenté sur la figure 1. On note  $v_A$  la vitesse des particules au niveau de l'armature  $A$ . Calculer leur vitesse  $v_B$  au niveau de l'armature  $B$  en fonction de  $v_A$  et de la différence de potentiel  $U_{AB} = V_A - V_B$  entre les deux armatures.

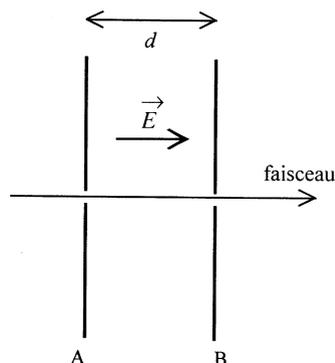


Figure 1

*Application numérique :* On suppose  $v_A$  négligeable devant  $v_B$ . Calculer  $v_B$  pour un proton, puis pour un ion césium  $^{137}\text{Cs}^+$ , dont la masse est approximativement 137 fois celle du proton. On donne  $U_{AB} = 750 \text{ kV}$ .

2. Le résultat précédent serait-il modifié pour une forme différente des armatures du condensateur ?

3. On cherche à obtenir la tension continue  $U_0$  en redressant une tension alternative au moyen du dispositif représenté schématiquement sur la figure 2.  $D$  représente une diode, supposée idéale, et le générateur délivre la tension  $U(t) = U_0 \sin \omega t$ , de période  $T = 2\pi/\omega$ . A  $t = 0$ , le condensateur n'est pas chargé.

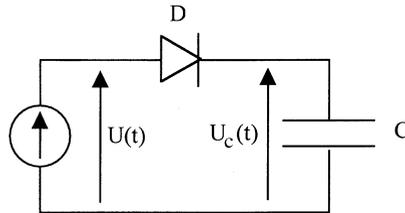


Figure 2

a) Calculer la tension aux bornes du condensateur  $U_c(t)$  en fonction de  $t$  et représenter graphiquement sa variation.

b) Calculer la valeur maximale de la valeur absolue de la tension aux bornes de la diode.

4. Le dispositif précédent ne permet pas d'atteindre des tensions très élevées, car la diode claquerait. Pour l'améliorer, on utilise le dispositif représenté sur la figure 3, où sont définies les charges  $Q(t)$ ,  $Q'(t)$  des armatures des condensateurs, les intensités  $i(t)$ ,  $i'(t)$ , ainsi que leurs conventions de signe. Les diodes  $D$  et  $D'$  sont supposées idéales. Les condensateurs ne sont pas chargés à l'instant initial  $t = 0$ , et la tension délivrée par le générateur vaut toujours  $U(t) = U_0 \sin \omega t$ .

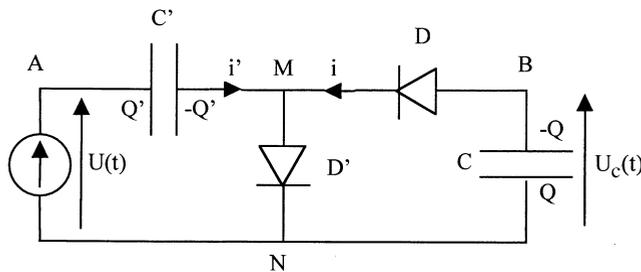


Figure 3

a) Relier  $i$  et  $i'$  à  $Q$  et  $Q'$ .

b) Montrer que  $Q$  est une fonction croissante du temps.  $Q$  est donc toujours positive.

c) On suppose la diode  $D$  passante. Relier alors  $Q$ ,  $Q'$  et  $U$ , et montrer que la diode  $D'$

est nécessairement bloquée.

**d)** Montrer, en raisonnant par l'absurde, que lorsque  $U(t)$  décroît,  $D'$  est nécessairement bloquée, et que  $Q(t) + Q'(t)$  est constante.

**e)** Montrer de même par l'absurde, et à l'aide des questions **4.b)**, **4.c)**, **4.d)**, que si  $U(t)$  croît,  $D$  est bloquée, et que  $Q(t)$  reste constant.

**5.** On admet alors que la diode  $D'$  devient passante avant que  $U(t)$  n'atteigne son maximum  $U_0$ .

**a)** En déduire que la valeur maximale de  $Q'$  est  $C'U_0$ , et qu'elle est atteinte chaque fois que  $U(t)$  atteint sa valeur maximale.

**b)** On note  $Q_n$  et  $Q'_n$  les valeurs respectives de  $Q$  et  $Q'$  lorsque  $U(t)$  atteint pour la  $n^{\text{ème}}$  fois son minimum  $-U_0$ . On admet que la diode  $D$  devient passante avant que  $U(t)$  n'atteigne ce minimum. Relier  $Q_n$ ,  $Q'_n$  et  $U_0$ . En utilisant ce qui précède, montrer que  $Q_n$  vérifie la relation de récurrence

$$\left(1 + \frac{C'}{C}\right) Q_n = Q_{n-1} + 2C'U_0. \quad (1)$$

**c)** La suite  $Q_n$  converge-t-elle? Déterminer la valeur asymptotique  $Q_\infty$  de la charge aux bornes du condensateur  $C$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Que valent alors les tensions aux bornes de  $C'$  et aux bornes de  $C$ ?

**d)** Quelle est la valeur maximale de la tension aux bornes des diodes  $D$  et  $D'$  lorsque  $Q$  et  $Q'$  ont atteint leurs valeurs asymptotiques? Quel est donc l'intérêt de ce dispositif?

## Deuxième partie Accélération par une tension alternative

On peut également obtenir des accélérations importantes en utilisant directement le champ alternatif, sans avoir besoin de le redresser par des diodes, au moyen du dispositif représenté sur la figure 4, connu sous le nom d'appareil de Wideröë.

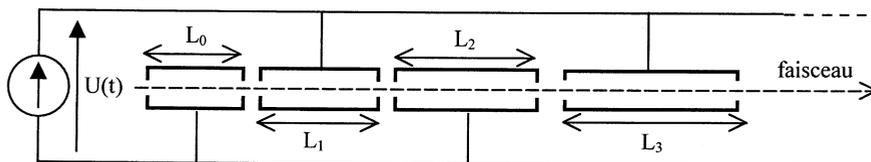


Figure 4

La tension  $U(t) = U_0 \sin \omega t$ ,  $U_0 > 0$ , est cette fois appliquée entre des *tubes de glissement*, boîtes complètement fermées, à l'exception de deux petits trous percés à leurs extrémités et permettant

de laisser passer le faisceau de particules. L'idée est d'accélérer les particules lorsqu'elles passent d'un tube à l'autre. Les tubes sont supposés parfaitement conducteurs.

1. Expliquer pourquoi on peut considérer l'accélération comme nulle à l'intérieur des tubes.

2. On note  $L_n$  la longueur du tube  $n$ ,  $n \geq 0$ ,  $v_n$  la vitesse d'une particule à l'intérieur de ce tube, et  $t_n$  l'instant auquel elle y entre. Expliquer qualitativement pourquoi on a intérêt à avoir  $t_{n+1} - t_n = \pi/\omega = T/2$  (condition dite de synchronisme).

3. On appelle  $V(t)$  le potentiel au point où se trouve la particule à un instant  $t$ . On note  $t'_n$  l'instant auquel la particule quitte le tube  $n$ .

a) Exprimer la différence de potentiel  $\delta V_n = V(t_{n+1}) - V(t'_n)$  à l'aide de  $U(t)$ , en distinguant selon la parité de  $n$ .

b) On considère le temps de passage d'un tube à l'autre comme très petit devant la période  $T$ , et l'on suppose réalisée la condition de synchronisme de la question 2. précédente. Montrer que dans ces conditions on a, pour tout  $n$ , une différence de potentiel  $\delta V_n$  indépendante de  $n$  :  $\delta V_n = -U_0 \sin \phi_0$ , où  $\phi_0 = \omega t_0$ ,  $t_0$  étant l'instant auquel la particule entre dans le tube  $n = 0$ . Quel est le rôle de la condition, que l'on supposera réalisée,  $0 < \phi_0 < \pi$  ?

c) Relier  $v_{n+1}^2$  et  $v_n^2$ ; en déduire  $v_n$ . Exprimer  $L_n$  en fonction de  $n$ ,  $U_0$ ,  $\phi_0$ ,  $\omega$ ,  $v_0$ ,  $e$  et  $m$ .

4. Application numérique :

a) Calculer la longueur du premier tube pour des ions  $^{137}\text{Cs}^+$ , en prenant pour vitesse d'injection  $v_0$  la valeur  $v_B$  obtenue à la question 1. de la première partie, à la sortie du condensateur, pour une tension constante d'accélération  $U_{AB} = 750$  kV. On donne  $\omega/2\pi = 10$  MHz.

b) On donne pour la machine de Widerøe  $U_0 = 100$  kV,  $\phi_0 = \pi/3$ . Pour quelle valeur de  $n$  l'énergie de la particule aura-t-elle au moins doublé? En déduire l'ordre de grandeur de la longueur totale de l'accélérateur pour atteindre une énergie double de l'énergie d'injection.

c) On injecte dans le dispositif précédent un ion de même charge  $e$  et de même vitesse  $v_0$ , mais de masse différente  $m'$ . Les valeurs des  $L_n$ ,  $U_0$  et  $\omega$  sont les mêmes que précédemment, mais l'instant de l'injection  $\tau_0$  peut différer de  $t_0$ . On pose  $\alpha_0 = \omega\tau_0$ . À quelle condition sur  $m'$  existe-t-il une valeur de  $\alpha_0$  telle que la condition de synchronisme soit réalisée? Calculer numériquement le nombre de masse maximal que peut avoir un ion pour être accéléré de manière synchrone.

5. À paramètres  $m$ ,  $L_n$ ,  $U_0$ ,  $v_0$  donnés, la condition de synchronisme n'est réalisée que si la particule entre exactement à l'instant  $t_0$ , à une période près. Etudier qualitativement l'accélération d'une particule entrant avec la même vitesse  $v_0$ , mais légèrement en retard, à un instant  $\tau_0$  un peu postérieur à  $t_0$ . Aura-t-elle tendance à combler son retard? On discutera suivant la valeur de  $\phi_0$ . On étudiera de même le cas d'une particule arrivant légèrement en avance. Que peut-on en conclure quant à la stabilité du mécanisme de synchronisme? Si l'on injecte à l'entrée de l'appareil un faisceau continu, qu'observera-t-on, qualitativement, à la sortie?

6. On va maintenant étudier de façon plus quantitative la stabilité du mécanisme d'accélération, dans le cas où l'augmentation de vitesse dans l'accélérateur est très petite devant la vitesse initiale  $v_0$ , c'est-à-dire  $\frac{eU_0}{mv_0^2} \ll 1$ .

a) On note toujours  $v_n$  la vitesse de la particule synchrone lorsqu'elle traverse le tube  $n$ , calculée dans la question 3.c) de cette partie. Exprimer  $v_{n+1} - v_n$  au premier ordre dans le potentiel accélérateur  $U_0$ . On supposera  $v_n$  très peu différente de  $v_0$ .

b) On considère maintenant une particule non synchrone, de même masse, et injectée exactement avec la même vitesse  $v_0$ , mais à un instant un peu différent  $\tau_0$ . On notera  $\tau_n$  l'instant où elle entre dans le tube  $n$ ,  $w_n$  sa vitesse dans ce tube, avec par hypothèse  $w_0 = v_0$ . On pose  $\alpha_n = \omega\tau_n - n\pi$ . Que vaudrait  $\alpha_n$  si la particule était synchrone ( $\tau_n = t_n$  pour tout  $n$ ) ?

Calculer la variation de vitesse entre deux tubes,  $w_{n+1} - w_n$ , au premier ordre en  $U_0$ , et en fonction de  $e$ ,  $m$ ,  $\alpha_{n+1}$  et  $v_0$ .

c) On pose  $w_n = v_n + \epsilon_n$ , où  $v_n$  désigne la vitesse de la particule synchrone, avec par hypothèse  $\epsilon_0 = 0$ . En utilisant les résultats des questions a) et b) précédentes, en déduire que

$$\epsilon_{n+1} - \epsilon_n = \frac{eU_0}{mv_0} (\sin \alpha_{n+1} - \sin \phi_0). \quad (2)$$

d) En traitant  $\epsilon_n$  comme un infiniment petit du premier ordre, c'est-à-dire tel que  $\epsilon_n \ll v_n \simeq v_0$ , établir la relation cinématique

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n \simeq -\frac{\pi\epsilon_n}{v_0}. \quad (3)$$

e) Les variations de la vitesse  $w_n$  et de la phase  $\alpha_n$  étant faibles d'un tube à l'autre, on peut traiter  $n$  comme un paramètre continu et noter indifféremment  $\alpha_n = \alpha(n)$ , et  $\epsilon_n = \epsilon(n)$ . On pose alors  $d\epsilon(n)/dn = \epsilon_{n+1} - \epsilon_n$  et  $d\alpha(n)/dn = \alpha_{n+1} - \alpha_n$ . Écrire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par  $\alpha(n)$ . Quelles sont les conditions initiales sur  $\alpha(0)$  et  $\alpha'(0)$  ?

f) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par  $\alpha(n)$  est formellement analogue à l'équation du mouvement d'un point matériel se déplaçant sur un axe  $\alpha$  réel, dans une énergie potentielle  $W(\alpha)$  dont on donnera l'expression. On prend  $\phi_0 \leq \pi/2$ . Quels sont les extrema de  $W(\alpha)$  ? Tracer son graphe pour  $\phi_0 = \pi/3$ .

g) Montrer comment on peut déterminer graphiquement le domaine de valeurs initiales  $\alpha(0)$  pour lesquelles on observe des oscillations de  $\alpha$  autour de la phase synchrone  $\phi_0$ .

### Troisième partie Accélération dans un circuit résonant

Pour obtenir des vitesses plus élevées au moyen du dispositif précédent, il faut des champs de fréquence plus grande, ce qui conduit à utiliser un dispositif un peu différent, utilisant un circuit résonant (« linac » d'Alvarez). Les applications numériques de cette partie utilisent

des paramètres voisins de ceux du linac pré-injecteur du synchrotron à protons de Brookhaven (USA).

Comme précédemment, le dispositif est composé d'éléments mis bout à bout. Il admet une symétrie de révolution autour de l'axe du faisceau,  $Oz$ . Un élément est représenté sur la figure 5, en coupe suivant un plan  $xOz$ . Le faisceau passe dans des tubes de glissement conducteurs de rayon  $R_1$  dont les extrémités sont fermées par des disques percés en leur centre ; il est accéléré dans l'intervalle  $g$  entre deux tubes consécutifs. Les tubes sont insérés dans un cylindre conducteur de rayon  $R_2$  et de longueur  $l$ , auquel ils sont reliés par des fils conducteurs. Un courant  $i(t)$  peut alors circuler, qu'on supposera dirigé suivant l'axe  $Oz$  et réparti uniformément sur la surface du cylindre extérieur d'une part, et, en sens inverse, sur celle des tubes intérieurs d'autre part.

On admettra que le champ magnétique créé par le courant circulant dans les fils reliant le cylindre extérieur aux tubes de glissement peut être négligé, car les courants correspondant à deux éléments successifs s'annulent mutuellement. Seules contribuent alors au champ magnétique les nappes de courant circulant sur le cylindre extérieur et sur les tubes. On négligera également, pour ce calcul, l'espace  $g$  entre les tubes. Le système peut donc être assimilé à un ensemble de deux cylindres coaxiaux.

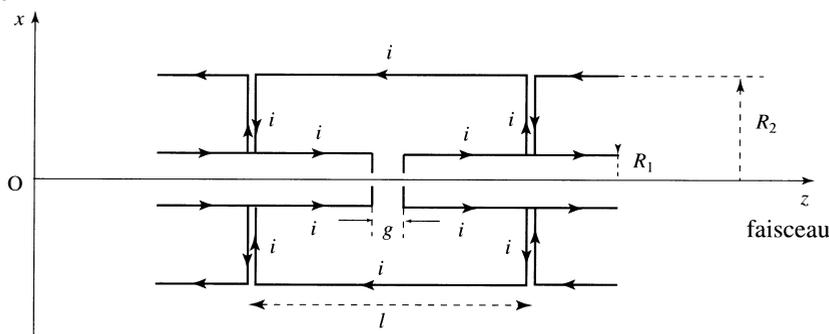


Figure 5

1. Déterminer la direction du champ magnétique dans tout l'espace en utilisant un argument de symétrie clairement explicité.
2. Calculer le champ  $\vec{B}$  dans la cavité délimitée par le cylindre et les tubes, en fonction de la distance  $r$  à l'axe du faisceau et de l'intensité totale  $i$ .
3. Calculer l'énergie magnétique contenue dans un élément de longueur  $l$  du système. En déduire l'inductance  $L$  de cet élément.

*Application numérique :* Calculer  $L$  pour  $l = 40$  cm,  $R_2 = 45$  cm,  $R_1 = 8$  cm.

4. Calculer la capacité  $C$  du condensateur plan constitué par les extrémités des deux tubes de glissement, en supposant  $g \ll R_1$ . Dans le problème, on néglige la capacité des conducteurs cylindriques emboîtés.

*Application numérique :* Calculer  $C$  pour  $g = 4$  cm en adoptant l'expression obtenue.

5. Calculer, littéralement puis numériquement, la fréquence de résonance  $\omega_0/2\pi$  du circuit constitué par cette inductance et cette capacité.

6. Calculer la longueur d'onde  $\lambda_0$  associée. L'approximation des régimes quasi-stationnaires vous paraît-elle justifiée ici ?

7. Le circuit n'est en fait pas idéal, et il existe des pertes par effet Joule, dont on notera  $P$  la puissance moyenne pour l'élément étudié ci-dessus. On rappelle la définition du facteur de qualité  $Q$  :  $Q/2\pi$  est égal au rapport de l'énergie totale emmagasinée dans le circuit et de l'énergie dissipée pendant une période, ces quantités étant calculées à la résonance. Calculer le facteur de qualité  $Q$  du circuit en fonction de  $P$ ,  $L$ ,  $C$  et  $U_0$ , tension maximale aux bornes du condensateur.

*Application numérique* : Calculer  $Q$  pour  $U_0 = 200$  kV,  $P = 20$  kW.

8. Si l'on accole plusieurs éléments tels que celui représenté sur la figure 5, on remarque que les potentiels à la sortie de deux tubes consécutifs vibrent en phase. À quelle condition une particule accélérée dans cette structure verra-t-elle toujours le même potentiel à la sortie de chaque tube (condition de synchronisme) ?

*Application numérique* : Calculer la vitesse que doit avoir une particule traversant l'élément considéré plus haut pour que la condition de synchronisme soit réalisée. L'utilisation de la mécanique newtonienne est-elle toujours justifiée ?

\* \*  
\*