**ÉCOLE POLYTECHNIQUE** **FILIÈRE MP**

**CONCOURS D'ADMISSION 2001**

# DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

$\star\star\star$

*On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

$\star\star\star$

On se propose d'établir quelques propriétés des sous-groupes discrets des espaces euclidiens. Dans tout le problème, on désigne par $n$ un entier strictement positif, par $E$ l'espace $\mathbf{R}^n$, par $(\ |\ )$ son produit scalaire usuel et par $\|\ \ \|$ la norme correspondante. On rappelle les faits suivants :

*a)* un sous-ensemble $L$ de $E$ est dit *discret* si tout élément $x$ de $L$ est isolé, *i.e.* admet un voisinage $V$ dans $E$ tel que $L \cap V = \{x\}$ ;

*b)* un groupe abélien $G$ est isomorphe à un groupe $\mathbf{Z}^m$ si et seulement s'il admet une $\mathbf{Z}$-*base*, c'est-à-dire une famille $(e_1, \dots, e_m)$ telle que tout élément $g$ de $G$ s'écrive d'une façon unique sous la forme $g = \sum_{i=1}^{m} k_i e_i$ avec $k_i \in \mathbf{Z}$.

## Première partie

**1.** Démontrer les assertions suivantes :

**a)** Un sous-groupe $L$ de $E$ est discret si et seulement si l'élément $0$ est isolé.

**b)** Tout sous-groupe discret $L$ de $E$ est fermé dans $E$.

**c)** Les sous-groupes discrets de $\mathbf{R}$ sont exactement les sous-ensembles de la forme $a\mathbf{Z}$ avec $a \in [0, +\infty[$.

**2.** On désigne par $\alpha$ un nombre réel $> 0$ et par $L$ le sous-groupe de $\mathbf{R}$, ensemble des réels $m + n\alpha$ où $n, m \in \mathbf{Z}$. Montrer que $L$ est discret si et seulement si $\alpha$ est rationnel.

**3.** Construire un sous-groupe discret $L$ de $\mathbf{R}^2$ tel que sa première projection sur $\mathbf{R}$ ne soit pas discrète.

**4.** On se propose ici de démontrer que tout sous-groupe discret $L$ de $E$ est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe $\mathbf{Z}^m$. On désigne par $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par $L$, par $m$ sa dimension, par $(a_1, \ldots, a_m)$ une base de $F$ contenue dans $L$, et par $L'$ le sous-groupe de $L$ engendré par cette base. Enfin on pose

$$P = L \cap \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in [0, 1[ \right\} .$$

**a)** Vérifier que $P$ est un ensemble fini.

**b)** Etant donné un élément $x$ de $L$, construire un couple $(y, z) \in L' \times P$ tel que l'on ait $x = y + z$, et démontrer son unicité.

**c)** Soit encore $x$ un élément de $L$ ; écrivant $kx = y_k + z_k$ (pour $k$ entier $> 0$), montrer qu'il existe un entier $d > 0$ tel que l'on ait $dx \in L'$.

**d)** Conclure.

**5.** Dans cette question, $L$ est un sous-groupe de $\mathbf{Z}^m$ ; ses éléments seront notés $x = (x_1, \ldots, x_m)$ ; on posera $\pi(x) = x_m$.

**a)** Montrer qu'il existe un entier $k \geqslant 0$ et un élément $x^\circ$ de $L$ tel que l'on ait

$$\pi(L) = k\mathbf{Z} = \pi(x^\circ)\mathbf{Z} .$$

**b)** On suppose ici $\pi(L)$ non réduit à $\{0\}$ ; étant donné un élément $x$ de $L$, construire un couple $(p, \widetilde{x}) \in \mathbf{Z} \times L$ tel que l'on ait $\widetilde{x}_m = 0$ et $x = px^\circ + \widetilde{x}$ ; démontrer son unicité.

**c)** En déduire que tout sous-groupe discret de $E$ est isomorphe à un groupe $\mathbf{Z}^r$.

**6.** On suppose ici $n = 2$ et on considère deux $\mathbf{Z}$-bases $(u_1, u_2)$, $(v_1, v_2)$ d'un même sous-groupe discret $L$ de $E$. Comparer les aires des parallélogrammes construits respectivement sur $(u_1, u_2)$ et $(v_1, v_2)$.

## Deuxième partie

**7.** Dans cette question, on désigne par $B$ la base canonique de $E$ et par $GL(E)$ le groupe des automorphismes linéaires de $E$. Pour toute partie $X$ de $E$, on note $L(X)$ le sous-groupe de $E$ engendré par $X$.

Soit $G$ un sous-groupe fini de $GL(E)$ tel que les matrices des éléments de $G$ dans la base $B$ soient à coefficients rationnels. On note $GB$ l'ensemble des vecteurs $g(x)$ où $g \in G$ et $x \in B$.

**a)** Montrer qu'il existe un entier $d > 0$ tel que l'on ait $dL(GB) \subset L(B)$.

**b)** Démontrer l'existence d'une base de $E$ dans laquelle les matrices des éléments de $G$ sont à coefficients entiers.

**8.** Soit $A$ une matrice à $n$ lignes et $n$ colonnes, à coefficients rationnels, d'ordre fini $r$ (c'est-à-dire que $A^r = I$ et que $r$ est le plus petit entier $> 0$ ayant cette propriété).

**a)** Montrer que le polynôme caractéristique de $A$ est à coefficients entiers.

**b)** On suppose ici $n = 2$. Montrer que $r$ ne peut prendre que les valeurs $1, 2, 3, 4, 6$ et donner, pour chacune de ces valeurs, un exemple de matrice d'ordre $r$ à coefficients entiers.

## Troisième partie

On désigne par $O(E)$ le groupe des automorphismes linéaires orthogonaux de $E$ (ensemble des $u$ de $GL(E)$ tels que $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x$ de $E$), et par $AO(E)$ l'ensemble des transformations de $E$ de la forme

$$x \mapsto g(x) = u(x) + a \quad \text{où} \quad u \in O(E) \quad \text{et} \quad a \in E\ ;$$

on écrit alors $g = (u, a)$. On note $e$ l'élément neutre de $O(E)$.

**9.** Montrer que $O(E)$ est compact.

**10.a)** Vérifier que $AO(E)$ est un groupe, écrire sa loi de groupe, préciser son élément neutre, puis l'inverse d'un élément $(u, a)$.

**b)** Calculer $(u, a)\,(e, b)\,(u, a)^{-1}$.

**11.** On note $\rho$ le morphisme $AO(E) \to O(E)$ défini par $\rho(u, a) = u$. On fixe un sous-groupe discret $L$ de $E$ qui engendre linéairement $E$ et on note $G$ le sous-groupe de $AO(E)$ formé des éléments $g$ tels que $g(L) = L$.

**a)** Vérifier que, si un élément $(u, a)$ de $AO(E)$ appartient à $G$, il en est de même de $(u, 0)$ et $(e, a)$.

**b)** Montrer que $\rho(G)$ est fini.

**c)** Déterminer $G$ dans le cas où $n = 2$ et où $L$ est l'ensemble des couples $(x_1, x_2)$ de $E$ tels que $x_1 \in 2\mathbf{Z},\ x_2 \in \mathbf{Z}$.

* *
*