Concours Centrale - Supélec 2001

Épreuve : Mathématiques II Filière MP

Le but du problème est d'établir quelques propriétés des cônes et coniques dans le cadre de la théorie des formes quadratiques.

Dans tout le problème, le corps de base est $\mathbb{R}$. Si E est un espace vectoriel réel, on désigne par $Q(E)$ l'espace vectoriel réel des formes quadratiques définies sur E. Si $q \in Q(E)$, on désigne par C_q *le cône isotrope de* q, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $q(x) = 0$.

Les parties sont largement indépendantes et de difficulté croissante. La résolution des questions préliminaires **A** et **B** n'est pas indispensable pour la suite du problème.

Question préliminaire A.

Soit E_2 un plan vectoriel réel et $q \in Q(E_2) - \{0\}$; en vue de décrire C_q on introduit une base $B = (i,j)$ de E_2 et on désigne par

$$M = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$$

la matrice de q relativement à B.

Quelle est la signature de q ? Montrer que C_q est réduit à $\{0\}$ ou est la réunion d'un ensemble fini de droites, dont on précisera le cardinal. On utilisera pour toute cette question une décomposition de Gauss et la discussion portera entre autres sur le signe de $rt - s^2$.

Partie I - Cônes contenant cinq vecteurs donnés

On rapporte l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique $<.,.>$ à sa base orthonormale canonique $B_c = (i, j, k)$ et on considère deux vecteurs e et e' de composantes respectives (a, b, c) et (a', b', c'), avec $abca'b'c' \neq 0$. On note $Q_{e,e'}$ l'ensemble des formes quadratiques $q \in Q(\mathbb{R}^3)$ telles que C_q contienne i, j, k, e et e' ; $Q_{e,e'}$ est un sous-espace vectoriel de $Q(\mathbb{R}^3)$ (on ne demande pas de le vérifier).

I.A - Soit $q \in Q(\mathbb{R}^3)$; donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la matrice de q relativement à B_c pour que C_q contienne i ; en déduire que C_q contient i, j et k si, et seulement si, il existe α, β, γ réels tels que :

$$\forall X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad q(X) = \alpha yz + \beta zx + \gamma xy. \qquad (1)$$

I.B - On désigne par l et l' les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ qui à un triplet $\tau = (\alpha, \beta, \gamma)$ associent respectivement : $l(\tau) = \alpha bc + \beta ca + \gamma ab$

et $l'(\tau) = \alpha b'c' + \beta c'a' + \gamma a'b'$.

I.B.1) Donner une relation entre le rang de la famille (l,l') et la dimension de $Q_{e,e'}$.

I.B.2) Lorsque cette dimension vaut 1, montrer que tous les éléments non nuls de $Q_{e,e'}$ ont le même cône isotrope.

I.B.3) À l'aide de $\mathrm{Vect}(e,e')$, interpréter la condition (2) suivante :

$$(bc'-b'c)(ca'-c'a)(ab'-a'b) \neq 0 \tag{2}$$

On suppose (2) vérifiée. Déterminer une base de $Q_{e,e'}$. Déterminer le rang des formes quadratiques non nulles de $Q_{e,e'}$. Montrer que les éléments de $Q_{e,e'}$ ont une signature différente de $(3,0)$. Quelles sont les valeurs possibles de cette signature ?

Dans la suite on sera amené à envisager des propriétés affines de $\mathbb{R}^3$ dont les éléments seront alors considérés comme des points. En particulier le point O sera le vecteur $(0,0,0)$.

Dans toute la suite du problème, on désigne par P_0 et P_1 les plans d'équations respectives $x+y+z = 0$ et $x+y+z = 1$ et,
pour tout triplet $\tau = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, on désigne par q_τ la forme quadratique qui à $M = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ associe $\alpha yz + \beta zx + \gamma xy$.

Partie II - Nature d'une section conique

Question préliminaire B

Déterminer les éléments communs aux cônes isotropes de toutes les formes quadratiques du type q_τ.

On fixe maintenant, pour toute la partie II, le triplet $\tau = (\alpha, \beta, \gamma)$ non nul et on désigne pour simplifier par C_τ le cône isotrope de q_τ.

II.A - Étude de $C_\tau \cap P_0$

Justifier l'existence d'une base $B_0 = (I, J)$ de P_0 qui soit une famille orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ et telle que la restriction $q_\tau|_{P_0}$ ait dans B_0 une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \beta' \end{bmatrix}$$

Discuter selon α' et β' la nature de $C_\tau \cap P_0$.

II.B - Étude de $C_\tau \cap P_1$

II.B.1) Soit B_0 comme en II.A, et $B = (I, J, K)$ qui la complète en une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, les coordonnées du point courant M de $\mathbb{R}^3$ seront désignées par X, Y et Z.

a) Montrer que, relativement au repère $(O\,;B)$, P_1 a une équation de la forme $Z = z_0$ où z_0 prend l'une ou l'autre de deux valeurs que l'on précisera.

b) De quelle forme est la matrice de q_τ relativement à B ? En conclure que si $(\alpha', \beta') = (0, 0)$, alors $\mathrm{rg}(q_\tau) \leq 2$. En déduire que $(\alpha', \beta') = (0, 0) \Rightarrow \alpha\beta\gamma = 0$.

On supposera désormais que $\alpha\beta\gamma \neq 0$, de sorte que $(\alpha', \beta') \neq (0, 0)$.

c) Montrer que, relativement au repère $(O\,;B)$, $C_\tau \cap P_1$ est définie par un système du type :

$$\begin{cases} \alpha' X^2 + \beta' Y^2 + \gamma' X + \delta' Y + \varepsilon' = 0 \\ Z = z_0 \end{cases}$$

En déduire que $C_\tau \cap P_1$ est une conique dont on précisera le genre en fonction de α' et β'.

II.B.2) Mettre en relation le genre de $C_\tau \cap P_1$ et la nature de $C_\tau \cap P_0$.

Partie III - Sections circulaires d'un cône

Soient a, b, c des scalaires non nuls, Π_0 et Π_1 les plans d'équations respectives

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \text{ et } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Soit τ un triplet non nul et q_τ la forme quadratique qui lui est associée ; C_τ en désigne le cône isotrope ; q_0 désigne enfin l'application carré scalaire canonique dans $\mathbb{R}^3$.

III.A - Montrer que si $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ vérifient

$$\frac{\alpha bc}{b^2 + c^2} = \frac{\beta ac}{a^2 + c^2} = \frac{\gamma ab}{a^2 + b^2} \qquad (3)$$

il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $l \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tel que

$$\forall M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ q_\tau(M) - \lambda q_0(M) = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \cdot l(M)$$

Dans ce cas, montrer que $C_\tau \cap \Pi_1$ est inclus dans une sphère. En conclure que $C_\tau \cap \Pi_1$ est un cercle. Que représente-t-il pour les points $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ et $C(0, 0, c)$?

On admettra que les relations (3) constituent une condition nécessaire et suffisante pour que $C_\tau \cap \Pi_1$ soit un cercle.

III.B - Montrer que pour tout point $M(x, y, z) \in \Pi_1$, il existe $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ tel que $x' + y' + z' = 1$ et que M soit le barycentre de A, B et C affectés des masses respectives x', y' et z'. Si τ est tel que $C_\tau \cap \Pi_1$ soit un cercle, donner une expression simple de $q_\tau(x, y, z)$ à l'aide de λ, x', y', z' et des carrés des distances $\|BC\|^2$, $\|CA\|^2$, $\|AB\|^2$.

Partie IV - Couple foyer — directrice d'une conique

Dans cette partie, on note pour simplifier C_0 le cône d'équation $yz + zx + xy = 0$. Pour la suite, a désigne un réel donné.

IV.A - Soit Ω_a le point de coordonnées (a, a, a). Montrer qu'il existe un réel $d_a \geq 0$ tel que, pour tout $M \in C_0 \backslash \{O\}$, la distance de Ω_a à la droite (OM) soit égale à d_a. En déduire la nature de C_0.

IV.B - On suppose désormais $a \neq 0$. Soit P_a le plan d'équation $x + y + z = a$; comment se déduit-il de P_1 ? Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on désigne par Φ_λ l'application qui à M de coordonnées (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ associe $(x + y + z - a)^2 + \lambda(yz + zx + xy)$.

Montrer que pour un unique $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\Phi_{\lambda_0}(M) = 0$ est l'équation d'une sphère Σ_a. En donner le centre et le rayon et la situer par rapport à C_0.

IV.C -

IV.C.1) Soit Π un plan non parallèle à P_a ; montrer qu'il existe une droite D incluse dans Π et un scalaire μ tels que :

$$\forall M(x, y, z) \in \Pi,\ (x + y + z - a)^2 = \mu(d(M, D))^2$$

où $d(M, D)$ désigne la distance de M à D.

Indication : on pourra s'intéresser à la relation $x + y + z - a = 0$; un croquis pourra être utile.

IV.C.2) On suppose, de plus, que Π est tangent à Σ_a en un point F. Pour tout $M \in \Pi$, exprimer $\Phi_{\lambda_0}(M)$ à l'aide de $\|FM\|$.

IV.D - Conclure de ce qui précède que $C_0 \cap \Pi$ est une conique de foyer F et de directrice D. Faire un croquis d'ensemble sans nécessairement chercher à représenter le repère canonique.

Partie V - Centre d'une conique

Dans cette partie, on considère $q \in Q(\mathbb{R}^3)$, dont on désigne par f la forme polaire.

V.A - Soient E' et E'' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ et soit $s \in L(\mathbb{R}^3)$ la symétrie qui à $X = X' + X''$, où $(X', X'') \in E' \times E''$, associe $s(X) = X' - X''$. Pour $(X', X'') \in E' \times E''$, exprimer $q(X' + X'') - q(X' - X'')$ à l'aide de f. En déduire que :

$$[\forall X \in \mathbb{R}^3, q(s(X)) = q(X)] \Leftrightarrow \forall (X', X'') \in E' \times E'', f(X', X'') = 0 \qquad (4)$$

On suppose q non dégénérée ; on ne demande pas de prouver l'existence et l'unicité de u automorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,\ f(X, Y) = \langle u(X), Y \rangle.$$

V.B - Si V est un élément non nul de $\mathbb{R}^3$, on pose $H = \left\{X \in \mathbb{R}^3 \middle| \langle V, X \rangle = 0\right\}$.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$; montrer que :

$$[\forall (X,Y) \in F \times H,\ f(X, Y) = 0] \Leftrightarrow u(F) \subset \mathrm{Vect}(V)$$

V.C - En déduire que l'hyperplan H possède un supplémentaire F vérifiant :

$$\forall (X,Y) \in F \times H, f(X, Y) = 0,$$

si et seulement si $\langle u^{-1}(V), V \rangle \neq 0$. Montrer que F est alors unique et en donner une description.

On choisit maintenant $V = (1, 1, 1)$, de sorte que $H = P_0$. Soit $\tau = (\alpha, \beta, \gamma)$, avec $\alpha\beta\gamma \neq 0$; on choisit $q = q_\tau$, on lui associe u comme ci-dessus et on appelle M la matrice de q relativement à la base canonique.

V.D - Déterminer la comatrice de M. Montrer que :

$$\langle u^{-1}(V), V \rangle \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \qquad (5)$$

V.E - Si $\langle u^{-1}(V), V \rangle \neq 0$, on définit F comme ci-dessus, puis s à partir de la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^3 = F \oplus P_0$. Décomposer alors un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ ainsi que son image $s(X)$ sur la somme directe $F \oplus P_0$. En déduire que

s laisse stable P_1. En déduire que $C_q \cap P_1$ possède un centre de symétrie dont on donnera les coordonnées.

V.F - On suppose au contraire que $< u^{-1}(V), V > = 0$.

V.F.1) Quelle est la nature de $C_q \cap P_1$? On pourra utiliser II.B.2.

V.F.2) On définit une base orthonormale $B = (I, J, K)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que J soit colinéaire à $u^{-1}(V)$ et K directement colinéaire à V. Étudier soigneusement la forme de la matrice de q relativement à B et retrouver la nature de $C_q \cap P_1$. Que représente la direction de J pour cette conique ?

••• FIN •••
