SESSION 2000

PSI005

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 99-018 du 01.02.99.

But du problème

Dans la partie I, on étudie les solutions d'une équation différentielle

$$(E)\quad y'' - \alpha y = f(x),$$

solutions vérifiant en outre des conditions aux limites.

Dans la partie II, on introduit une fonction K de deux variables, fonction qui est définie comme somme d'une série.

Dans la partie III, à chaque fonction f continue impaire 2π-périodique sur **R**, on associe une fonction h grâce à la relation

$$h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x,t)f(t)dt$$

et on étudie quelques propriétés de la fonction ainsi obtenue.

PARTIE I

Lorsque $p \in \mathbf{N}$, on désigne par $\mathscr{C}^p([0,\pi], \mathbf{R})$ le **R**-espace vectoriel des applications de classe $\mathscr{C}^p$ de $[0,\pi]$ dans **R**.

Lorsque $\alpha \in \mathbf{R}$ et $f \in \mathscr{C}^0([0,\pi], \mathbf{R})$ on considère l'équation différentielle :

$$(E)\quad y'' - \alpha y = f(x).$$

On désigne par :

- $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des solutions réelles sur l'intervalle $[0,\pi]$ de l'équation différentielle (E) ;
- $\mathscr{S}^0(E)$ l'ensemble des fonctions F appartenant à $\mathscr{S}(E)$ et vérifiant en outre :

$$F(0) = F(\pi) = 0.$$

I.1/ On suppose, dans cette question, que f est la fonction nulle.

I.1.1/ Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}^0(E)$ lorsque $\alpha = 0$.

Tournez la page S.V.P.

J. 1000

I.1.2/ Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}^{\,0}(E)$ (selon la valeur de $\omega \in \mathbf{R}_+^*$)

I.1.2.1/ lorsque $\alpha = \omega^2$,

I.1.2.2/ lorsque $\alpha = -\omega^2$.

I.2./ On suppose, dans cette question, que $\alpha = 0$.

I.2.1/ Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}^{\,0}(E)$

I.2.1.1/ lorsque $f(x) = \cos x$,

I.2.1.2/ lorsque $f(x) = \sin(nx)$ (où n désigne un entier naturel <u>non nul</u> fixé).

I.2.2/ On suppose que $f(x) = |\cos x|$.

I.2.2.1/ Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}(E)$.

I.2.2.2/ Montrer que $\mathscr{S}^{\,0}(E)$ contient un seul élément, (seule fonction F de classe $\mathscr{C}^{\,2}$ sur $[0,\pi]$ telle que pour tout $x \in [0,\pi]$; $F''(x) = |\cos x|$ et $F(0) = F(\pi) = 0$) ; expliciter $F(x)$ et indiquer l'allure de son graphe.

I.3/ On suppose toujours que $\alpha = 0$ et on désigne par f une fonction quelconque appartenant à $\mathscr{C}^{\,0}([0,\pi], \mathbf{R})$.

Montrer que $F \in \mathscr{S}(E)$ si et seulement si il existe $(A,B) \in \mathbf{R}^2$ tel que pour tout $x \in [0,\pi]$ on ait :

$$F(x) = \int_0^x \left[\int_0^u f(t)dt\right] du + Ax + B.$$

En déduire que pour tout $f \in \mathscr{C}^{\,0}([0,\pi], \mathbf{R})$ l'ensemble $\mathscr{S}^{\,0}(E)$ contient un seul élément que l'on notera F_1.

Dans toute la suite de cette partie, on désigne par φ l'application de $\mathscr{C}^{\,0}([0,\pi], \mathbf{R})$ dans lui même qui à f associe l'élément F_1, unique solution sur l'intervalle $[0,\pi]$ de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' = f(x)$$

vérifiant en outre $y(0) = y(\pi) = 0$.

I.4/ Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^{\,0}([0,\pi], \mathbf{R})$.

I.5/ L'endomorphisme φ est-il injectif ? surjectif ?

I.6/ Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme φ.

I.7/ Pour tout $x \in [0,\pi]$ on désigne par T_x l'ensemble des couples $(t, u) \in \mathbf{R}^2$ tels que $0 \le t \le u \le x$.

I.7.1/ Représenter l'ensemble T_x dans le plan euclidien pour un x fixé, $(0 < x < \pi)$.

I.7.2/ Justifier les égalités suivantes, pour $x \in [0,\pi]$ et $f \in \mathscr{C}^{\,0}([0,\pi], \mathbf{R})$:

$$\iint_{T_x} f(t)\, du\, dt = \int_0^x \left[\int_0^u f(t)\, dt\right] du = \int_0^x (x-t)\, f(t) dt.$$

I.7.3/ Soient $f \in \mathscr{C}^0([0,\pi], \mathbf{R})$ et $F_1 = \varphi(f)$.

I.7.3.1/ Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbf{R}$ (β que l'on explicitera) tel que pour tout $x \in [0,\pi]$ on ait l'égalité : $F_1(x) = \int_0^x (x-t)\, f(t)dt + \beta x \int_0^\pi (\pi - t) f(t)dt$.

I.7.3.2/ En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbf{R}$ (γ que l'on explicitera) tel que pour tout $x \in [0,\pi]$ on ait l'égalité : $F_1(x) = \gamma \left[\int_0^x t(\pi - x) f(t)dt + \int_x^\pi x(\pi - t) f(t)dt \right]$.

PARTIE II.

Etude d'une fonction de deux variables

Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ on note $K(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sin(nx)sin(ny)}{n^2}$, lorsque la série converge.

II.1/ Montrer que la fonction K est définie sur $\mathbf{R}^2$.
II.2/ Soit y un réel fixé, étudier la continuité de l'application $x \mapsto K(x, y)$.
II.3/ Développement en série de Fourier d'une fonction E_x .
On considère un nombre réel x fixé, $x \in [0, \pi]$ et on désigne par E_x l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ 2π-périodique et impaire, définie sur $[0, \pi]$ par :

$$E_x(t) = t(\pi - x) \text{ lorsque } 0 \le t \le x$$
et
$$E_x(t) = x(\pi - t) \text{ lorsque } x \le t \le \pi.$$

II.3.1/ Indiquer l'allure du graphe de $t \mapsto E_x(t)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ (pour un x fixé, $x \in]0,\pi[$) ; justifier la convergence de la série de Fourier réelle de E_x et préciser sa somme.

(**Rappel** : la série de Fourier réelle de E_x est : $\frac{a_0}{2} + \sum_{n \ge 1} a_n\, cos(nt) + b_n\, sin(nt)$

où $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E_x(t) cos(nt)dt$ et $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E_x(t) sin(nt)dt$

sont les coefficients de Fourier réels de E_x).

II.3.2/ Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction E_x.
II.3.3/ Exprimer $K(x, t)$ en fonction de $E_x(t)$ pour $x \in [0, \pi]$ et $t \in [0, \pi]$.

II.4/ On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^2$:
le carré C ensemble des couples $(x,t) \in [0,\pi] \times [0,\pi]$,
le triangle U ensemble des couples $(x,t) \in C$ tels que $0 < t < x < \pi$,
le triangle $\overline{U}$ ensemble des couples $(x,t) \in C$ tels que $0 \le t \le x \le \pi$.

II.4.1/ Déduire de II.3.3 l'existence d'un minimum et d'un maximum pour la fonction K sur le carré C et préciser la valeur du minimum.
II.4.2/ La fonction K possède-t-elle un maximum relatif sur le triangle U ?

Tournez la page S.V.P.

II.4.3/ Etudier les extremums de la fonction K sur l'ensemble $\overline{U} \setminus U$ (bords du triangle de $\overline{U}$).
II.4.4/ En déduire la valeur du maximum de K sur le carré C.
II.4.5/ Si $\delta \in \mathbf{R}$ on note Γ_δ l'ensemble des $(x,t) \in C$ tels que $K(x,t) = \delta$,
(Γ_δ est la ligne de niveau δ).

Représenter (sur un même croquis) l'ensemble C, Γ_0 et la ligne Γ_δ passant par le point $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

PARTIE III

Dans cette partie on désigne par :

- $\mathcal{I}_{2\pi}$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications continues, impaires 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
- K la fonction introduite dans la partie II $\left(K(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)\sin(ny)}{n^2} \right)$.

A toute fonction f appartenant à $\mathcal{I}_{2\pi}$ on associe la fonction $h = \psi(f)$ définie sur $\mathbf{R}$ par

$$h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K(x,t)\ f(t)dt.$$

III.1/ Vérifier que si $f \in \mathcal{I}_{2\pi}$ et si $h = \psi(f)$ alors la fonction h est impaire, 2π-périodique.
Justifier l'égalité

$$h(x) = 2\int_{0}^{\pi} K(x,t)\ f(t)dt.$$

III.2/ Déduire de II.3.3 et de la partie I que si $f \in \mathcal{I}_{2\pi}$ alors les fonctions $h = \psi(f)$ et $F_1 = \varphi(f)$ sont proportionnelles sur $[0, \pi]$; en déduire que h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, \pi[$ et qu'elle vérifie les relations :

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in\ ]0, \pi[\\ h''(x) = -\pi f(x) \\ h(0) = h(\pi) = 0. \end{cases}$$

III.3/ En utilisant (en particulier) l'imparité de f et de h, montrer que h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$.

Dans toute la suite de cette partie, pour chaque application g 2π-périodique, continue par morceaux de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, on désigne par $a_n(g)$ et $b_n(g)$ les coefficients de Fourier réels de g :
pour tout $n \in \mathbf{N}$: $a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)dt,\ b_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(nt)dt.$

Soient désormais $f \in \mathcal{I}_{2\pi}$ et $h = \psi(f)$.

III.4/ Etablir une relation entre $b_n(h)$ et $b_n(h'')$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

III.5/ Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}(b_n(f))^2$ $\left(\text{respectivement } \sum_{n\geq 1}\frac{(b_n(f))^2}{n^4}\right)$ et exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n(f))^2$ $\left(\text{respectivement } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(b_n(f))^2}{n^4}\right)$ en fonction d'une intégrale.

III.6/ Etablir l'inégalité :

$$\int_0^{\pi}(h(x))^2\,dx \leq \pi^2\int_0^{\pi}(f(x))^2\,dx.$$

III.7/ Soit $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, -\pi \leq x \leq \pi \text{ et } -\pi \leq y \leq \pi\}$.On considère l'intégrale double :

$$J(f) = \iint_D K(x,y)\ f(x)\ f(y)\ dx\ dy.$$

III.7.1/ Exprimer $J(f)$ en fonction de l'intégrale $\int_0^{\pi} f(x)\ h(x)dx$.

III.7.2/ Exprimer $J(f)$ en fonction de l'intégrale $\int_0^{\pi}(h'(x))^2\,dx$.

III.7.3/ Montrer que :

$$0 \leq J(f) \leq 2\pi\int_0^{\pi}(f(x))^2\,dx.$$

III.7.4/ Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{I}_{2\pi}$ telles que :

$$J(f) = 2\pi\int_0^{\pi}(f(x))^2\,dx.$$

Fin de l'énoncé