MATHÉMATIQUES II

Nota : les trois parties du problème peuvent être abordées indépendamment.

Partie I - Propriétés de la transformée de Legendre

Dans toute la partie I - , I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs réelles, définie sur I. On note $J(f)$ l'ensemble des réels p tels que la fonction définie sur I par $x \mapsto (px - f(x))$ soit majorée ; si $J(f) \neq \varnothing$, on définit la fonction g sur $J(f)$ par :

$$\forall p \in J(f),\ g(p) = \sup_{x \in I} (px - f(x)) \quad .$$

La fonction g est appelée la transformée de Legendre de f ; on note $g = \mathscr{L}(f)$.

I.A - Exemples

Calculer la transformée de Legendre $g = \mathscr{L}(f)$ (en précisant l'ensemble $J(f)$) et tracer le graphe de g, dans les cas suivants :

I.A.1) $f(x) = kx^2$ $(k \in \mathbb{R}_+^*)$; $I = \mathbb{R}$.

I.A.2) $f(x) = e^x$; $I = \mathbb{R}$.

I.A.3) $f(x) = \arctan(x)$; $I = \mathbb{R}$.

I.B - Etude générale

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. On suppose que $J(f)$ est non vide.

I.B.1) Montrer que $J(f)$ est un intervalle : on montrera que, si a et b sont dans $J(f)$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, $ta + (1-t)b$ appartient à $J(f)$.

I.B.2) Montrer que $g = \mathscr{L}(f)$ est convexe sur $J(f)$, c'est-à-dire :

$$\forall (a, b) \in J(f) \times J(f),\ \forall t \in [0, 1],\ g(ta + (1-t)b) \leq tg(a) + (1-t)g(b) .$$

I.B.3) Que peut-on dire de la monotonie de $g = \mathscr{L}(f)$ dans les cas suivants :

a) $I \subset \mathbb{R}^+$

b) $I \subset \mathbb{R}^-$.

I.C - Étude d'un cas particulier

Soit f une fonction de classe C^2 sur l'intervalle I, telle que : $\forall x \in I, f''(x) > 0$.

Filière PC

On sait que $f'(I)$ est un intervalle ; on note α et β ses extrémités et l'on suppose $\alpha < \beta$ (on peut avoir $\alpha = -\infty$ ou $\beta = +\infty$).

I.C.1) Montrer que $J(f)$ contient l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ et donner l'expression de g sur $]\alpha, \beta[$ en fonction de f et $f'^{[-1]}$ (fonction réciproque de la fonction f'). Pour $p \in]\alpha, \beta[$, on note $x(p)$ l'unique point de I tel que : $g(p) = px(p) - f(x(p))$.

I.C.2) Pour $p \in]\alpha, \beta[$, calculer $g'(p)$ au moyen de $x(p)$.

I.C.3) Montrer que, $\forall p \in]\alpha, \beta[$, la droite D_p d'équation $y = px - g(p)$ est tangente au graphe de la fonction f.

I.C.4) Soit $\mathscr{H} = \{h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / (\forall x \in \mathbb{R}\ h''(x) > 0) \text{ et } h'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\}$. Montrer que:

a) $\mathscr{L}(\mathscr{H}) \subset \mathscr{H}$.

b) $\forall h \in \mathscr{H}$, $\mathscr{L}(\mathscr{L}(h)) = h$.

c) $\mathscr{L}$ est une bijection de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{H}$.

Partie II - Généralisation aux fonctions de plusieurs variables

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. E désigne l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ ;$$

si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, on note X le vecteur colonne associé $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Ainsi, si Y est le vecteur colonne associé à $y \in E$, $\langle x, y \rangle = {}^tXY$.

Soit f une application de E dans $\mathbb{R}$, telle que, pour tout $p \in E$, l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \langle p, x \rangle - f(x)$, soit majorée ; on définit alors la transformée de Legendre de f, notée $\mathscr{L}(f)$, comme étant l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\mathscr{L}(f) : p \mapsto \sup_{x \in E} (\langle p, x \rangle - f(x))$.

Dans la suite de cette partie II, f est définie par $f(x) = {}^tXAX$, où A est une matrice carrée réelle d'ordre n, symétrique et dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

II.1) Soit $p \in E$ fixé. On pose $F(x) = \langle p, x\rangle - f(x)$.

Démontrer qu'il existe une base $B = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E telle que :

$$\text{si } x = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \text{, on a } F(x) = F_1(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} (q_i y_i - \lambda_i y_i^2)$$

où les q_i et les λ_i sont des réels à déterminer.

Montrer que la fonction F est majorée sur E et atteint sa borne supérieure.

On en déduit en particulier que la transformée de Legendre de f est bien définie.

II.2) Calculer $g = \mathscr{L}(f)$, la transformée de Legendre de f et montrer qu'il existe une matrice carrée réelle symétrique B, d'ordre n, qu'on exprimera en fonction de A telle que

$$\forall p \in E, g(p) = {}^tPBP,$$

où P est le vecteur colonne associé à p.

Calculer la fonction $h = \mathscr{L}(\mathscr{L}(f))$.

II.3)

a) Montrer que $\forall p \in E, \forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(tp) = t^2 f(p)$,

b) Montrer que :

$$\forall p \in E, \sum_{1=1}^{n} p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}(p) = 2f(p).$$

Indication : on pourra calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto f(tp)$.

II.4) En utilisant la question II.3-b), déterminer pour tout $p \in E$, un vecteur $x(p) \in E$ tel que $g(p) = f(x(p))$.

Indication : on pourra utiliser $\xi \in E$ tel que $(grad\ F)(\xi) = 0$.

Partie III - Problème d'optimisation

E désigne l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ muni du produit scalaire canonique, noté $\langle , \rangle$ et de la norme associée, notée $\| \ \|$. Si $x \in E$, on note X le vecteur colonne associé et par extension $\|X\| = \|x\| = \sqrt{{}^tXX}$.

Soit p un vecteur donné de E, A une matrice carrée réelle d'ordre n, symétrique et ayant toutes ses valeurs propres positives ou nulles.

On note F l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \langle p, x\rangle - {}^tXAX = {}^tPX - {}^tXAX.$$

Une partie C de E est dite convexe si :

$$\forall (x, y) \in C^2,\ \forall t \in [0, 1],\ tx + (1-t)y \in C.$$

Soit C une partie fermée, non vide, convexe, de E.

Lorsque F est majorée sur C, on s'intéresse à M, ensemble — éventuellement vide — des points de C où l'application F restreinte à C atteint sa borne supérieure :

$$M = \{x \in C \mid F(x) = \sup_{y \in C} F(y)\}.$$

III.A - Convexité de M

III.A.1) Soit x_1 et x_2 deux points de C et pour $t \in [0, 1]$, $x = tx_1 + (1-t)x_2$.
Montrer que : $F(x) = (1-t)F(x_2) + tF(x_1) + t(1-t)\,{}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2)$.

III.A.2) On suppose M non vide. Montrer que M est convexe.

III.B - Cas particulier.

Dans cette seule question III.B, on suppose de plus que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

III.B.1) Démontrer qu'il existe un nombre $k > 0$ tel que :

$$\forall x \in E\quad {}^tXAX \geq k\,{}^tXX.$$

III.B.2) Montrer que M est non vide.

III.B.3) Montrer que M ne contient qu'un élément.

III.C - Une caractérisation des points de M

III.C.1) Avec les mêmes notations qu'au III.A.1, montrer que :

$$F(x) - F(x_2) = -t^2.\ {}^t(X_1 - X_2)A(X_1 - X_2) + t\ .\ {}^t(P - 2AX_2)(X_1 - X_2).$$

III.C.2) Montrer l'équivalence :

$$x \in M \Leftrightarrow \left(x \in C \text{ et } \forall y \in C,\ {}^t(P - 2AX)(Y - X) \leq 0\right).$$

Donner l'interprétation de la caractérisation trouvée au moyen du gradient de F au point x.

III.D - Cas où C est borné

Dans cette question III.D, on suppose de plus que l'ensemble C est borné, contenu dans la boule fermée de centre O et rayon R.

III.D.1) Démontrer que M est non vide.

Trouver un exemple avec F non identiquement nulle où M a une infinité d'éléments.

III.D.2) Démontrer qu'il existe un réel α tel que : $\forall x \in E, \quad \|AX\| \leq \alpha\|X\|$.

III.D.3) Soit r un nombre réel strictement positif tel que :

$$r > \sup\{6\alpha R^2, 2R(\|p\| + 2\alpha R)\}$$

(où α est défini au III.D.2).

On se propose de construire par récurrence des suites (u_m), (v_m) de points de C et une suite réelle (t_m) telles que si U_m (resp. V_m) est le vecteur colonne associé à u_m (resp. v_m), on a pour tout $m \in \mathbb{N}$:

i) $\forall x \in C, \ {}^t(2AU_m - P)V_m \leq {}^t(2AU_m - P)X$;

ii) $t_m = \frac{1}{r} \ {}^t(P - 2AU_m)(V_m - U_m)$;

iii) $u_{m+1} = u_m + t_m(v_m - u_m)$.

On suppose donné $m \in \mathbb{N}$ et $u_m \in C$.

a) Montrer l'existence de $v_m \in C$ vérifiant la relation i).

b) Montrer que t_m défini par la relation ii) est dans l'intervalle $[0, 1]$.

c) Montrer que u_{m+1} défini par la relation iii) est dans C.

Déduire des questions a), b) et c) que pour tout $u_0 \in C$, les relations i), ii) et iii) permettent de définir les suites (u_m), (v_m) et (t_m).

III.D.4) Montrer que, si (u_m) est la suite définie à la question III.D.3), la suite $(F(u_m))$ est croissante et convergente.

Montrer qu'il existe une suite extraite de la suite (u_m) qui converge vers un élément de M.

••• FIN •••