

SESSION 2000

MP006



CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE MP

PHYSIQUE 1

DURÉE : 4 heures

*Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°99-018 du 01.02.99.*

Conformément à l'usage typographique international, les vecteurs sont représentés en gras>.

On donne les constantes physiques suivantes :

Charge élémentaire :  $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$

Constante de gravitation :  $G = 6,6726 \times 10^{-11} \text{ SI}$

Masse de l'électron :  $m_e = m_e^* = 0,911 \times 10^{-30} \text{ kg}$

Masse du noyau d'hélium :  $m_\alpha = m_\alpha^* = 6,65 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Masse d'un noyau d'or :  $m_{Au} = m_{Au}^* = 3,27 \times 10^{-25} \text{ kg}$

Charge d'un noyau d'or :  $Z_{Au} = 79 e$

Charge d'un noyau d'hélium :  $Z_{He} = 2 e$

Masse du Soleil :  $M_S = M_S^* = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$

Rayon du Soleil :  $R_S = 0,696 \times 10^9 \text{ m}$

Masse de la Terre :  $M_T = M_T^* = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$

Rayon de la Terre :  $R_T = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$

Masse de Lune :  $M_L = M_L^* = 73,5 \times 10^{21} \text{ kg}$

Rayon de la Lune :  $R_L = 1,76 \times 10^6 \text{ m}$

Distance Terre-Soleil :  $TS = 149 \times 10^9 \text{ m}$

Distance Terre-Lune :  $TL = 0,384 \times 10^9 \text{ m}$

Intensité du champ de pesanteur terrestre :  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .

Constante de l'interaction électrostatique :  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \text{ SI}$

Constante universelle des gaz parfaits :  $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

Nombre d'Avogadro :  $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

### A. Caractère singulier de la gravitation

On se propose de souligner, à l'aide de différents exemples, le caractère singulier de la force de gravitation, singularité à l'origine de la théorie de la relativité générale établie par Einstein en 1915.

On rappelle que la masse grave d'un corps, ou masse de gravitation, exprime la capacité qu'a un corps d'être attiré par un autre corps. La masse inerte désigne, elle, la capacité qu'a ce même corps de s'opposer à sa mise en mouvement à partir du repos, sous l'action d'une force. C'est donc la masse inerte qui apparaît dans l'écriture de la loi fondamentale de la dynamique (deuxième loi de Newton). Entre deux points matériels,  $A_1$  et  $A_2$ , de masses graves respectives  $m_1^*$  et  $m_2^*$ , Newton a admis que l'attraction gravitationnelle pouvait être exprimée par l'expression suivante de la force  $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$  qu'exerce  $A_2$  sur  $A_1$  :

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{K}{r^2} \mathbf{e}_r \quad \text{avec} \quad K = -Gm_1^* m_2^* \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{et} \quad \mathbf{r} = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

les vecteurs  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  situant les positions de  $A_1$  et  $A_2$  par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R} = Oxyz$ .

1. a) Comparer la force électrostatique et la force de gravitation qui s'exercent entre des particules  $\alpha$  (noyaux d'hélium) et des noyaux d'or (expérience de Rutherford). Conclure.
- b) Etablir l'expression de l'énergie potentielle d'interaction entre deux particules, de charges électriques  $q_1$  et  $q_2$  et de masses graves  $m_1^*$  et  $m_2^*$ , associée aux forces électrostatiques et aux forces de gravitation. On adoptera comme origine des énergies potentielles la valeur pour  $r$  infini.
2. a) En s'appuyant sur l'analogie entre la force de Coulomb d'interaction électrostatique et la force de gravitation, énoncer, sans les établir, les deux propriétés auxquelles satisfait le champ de gravitation  $\mathcal{G}$ :
  - i) la première, en relation avec la circulation de  $\mathcal{G}$ .
  - ii) la seconde, en relation avec le flux de  $\mathcal{G}$ .
- b) Montrer que le champ de gravitation, créé en un point  $M$ , par une sphère, de centre  $O$ , de rayon  $R$ , dont la distribution de masse grave est à symétrie sphérique, est radial et peut se mettre sous la forme :  $\mathcal{G}(M) = \mathcal{G}_r \mathbf{e}_r$  où  $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{OM}}{r}$  et  $r = \|\mathbf{OM}\|$ . Exprimer, en fonction de  $r$ ,  $\mathcal{G}_r$  ainsi que  $\Phi$ . Tracer les graphes correspondants  $\mathcal{G}_r(r)$  et  $\Phi(r)$ .
- c) On rappelle l'expression de l'énergie potentielle électrostatique d'une distribution de charge électrique en fonction du champ électrostatique  $\mathbf{E}$  :

$$\mathcal{E}_p = \int_{esp} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV$$

l'intégration portant sur tout l'espace. En s'appuyant sur l'analogie précédente, trouver l'énergie potentielle de gravitation d'une distribution sphérique uniforme, de masse grave totale  $M^*$  et de rayon  $R$ .

3. On considère une cabine spatiale, de centre de masse  $C$ , en translation par rapport au référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g = Tx_0y_0z_0$ , d'origine le centre  $T$  de la Terre et lui-même en translation par rapport au référentiel de Copernic  $\mathcal{R}_C$  ;  $\mathcal{R}_g$  peut être considéré comme galiléen avec une excellente approximation (Figure 1).

On s'intéresse au mouvement d'un point matériel  $A$ , de masse inerte  $m$  et de masse grave  $m^*$ , par rapport au référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}^*$  de la cabine, associé à  $\mathcal{R}_g$ . On ne tient pas compte de l'influence des astres autres que la Terre.

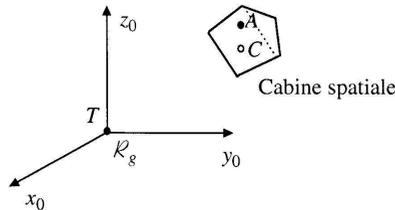


Figure 1

- a) Rappeler la définition de  $\mathcal{R}^*$ .
- b) En désignant par  $\mathbf{F}_{oc}$  la somme des forces occasionnelles, c'est-à-dire la somme des forces non gravitationnelles, qu'exerce l'environnement sur  $A$ , écrire la loi fondamentale de la dynamique pour  $A$  dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}^*$ .
- c) Appliquer le théorème du centre de masse à la cabine spatiale, de masse grave  $M_c^*$  et de masse inerte  $M_c$ , dans son mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_g$ . Montrer que l'on a :

$$\mathbf{a}_A^* = \frac{m^*}{m} \mathcal{G}(A) - \frac{M_c^*}{M_c} \mathcal{G}(B) + \frac{\mathbf{F}_{oc}}{m}$$

$B$  étant un point de la cabine que l'on précisera.

- d) Rappeler la première loi de Newton ou principe d'inertie. Une telle loi est expérimentalement constatée dans  $\mathcal{R}^*$  en faisant  $\mathbf{F}_{oc} = \mathbf{0}$ . En déduire, en admettant que le champ de gravitation est uniforme dans la cabine, que la masse grave peut être identifiée à la masse inerte. Commenter.
4. Dans cette question, on admet l'identité des masses grave et inerte. En outre, le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$  est en translation quasi circulaire par rapport au référentiel de Copernic supposé galiléen.
- a) Calculer, dans  $\mathcal{R}_C$ , les forces de gravitation qu'exercent le Soleil et la Terre sur la Lune. Le résultat obtenu semble paradoxal. Pourquoi ? Comment lève-t-on ce paradoxe ?

b) Appliquer le théorème du centre de masse à la Lune par rapport à  $\mathcal{R}_g$ . Montrer que, par rapport à  $\mathcal{R}_g$ , l'influence du Soleil apparaît par un terme différentiel dont l'influence est mineure. Commenter.

5. On montre que le référentiel du laboratoire  $\mathcal{L}$  peut être considéré comme un bon référentiel galiléen, pourvu que l'on substitue au champ de gravitation  $\mathcal{G}$  le champ de pesanteur terrestre  $\mathbf{g}$  et que les vitesses acquises soient suffisamment faibles (inférieures à  $500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ). On laisse tomber (sans vitesse initiale), d'une hauteur  $h = 2 \text{ m}$ , deux corps différents, par exemple, une bille  $B_1$  métallique, de masse  $m_1 = 0,7 \text{ kg}$ , et une bille plus légère,  $B_2$ , de masse  $m_2 = 0,058 \text{ kg}$  (Figure 2). On admet qu'il existe une force supplémentaire de frottement visqueux proportionnelle à la vitesse :  $\mathbf{F}_f = -\alpha\mathbf{v}$ ,  $\alpha$  étant un coefficient positif.

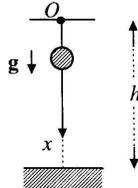


Figure 2

- A quelle équation différentielle la vitesse  $v$ , selon la verticale descendante  $Ox$ , satisfait-elle ?
- En déduire  $v(t)$  en introduisant  $\tau = m/\alpha$ . Représenter le graphe correspondant. Donner une expression approchée de  $v(t)$  pour  $t \ll \tau$ . Commenter.
- Trouver l'équation horaire  $x(t)$ . Donner une expression approchée de  $x(t)$  pour  $t \ll \tau$ . Commenter.
- Calculer  $\tau$  dans le cas des deux billes, sachant que  $\alpha = 13 \times 10^{-6} \text{ SI}$ . Que peut-on dire de l'influence de la force de frottement ?

6. Dans cette question, on reprend l'analyse précédente, mais la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse :  $\mathbf{F}_f = -\beta v^2 \mathbf{v}/v$ ,  $\beta$  étant un coefficient positif.

- Établir l'équation différentielle à laquelle satisfait la vitesse d'une bille selon l'axe vertical descendant. Quelle est la dimension physique de  $(mg/\beta)^{1/2}$  ?
- Montrer que  $v(t)$  a pour expression :

$$v(t) = v_l \tanh\left(\frac{gt}{v_l}\right)$$

$v_l$  étant une quantité que l'on déterminera. Tracer le graphe correspondant. Quelle est la signification physique de  $v_l$  ? Donner une expression approchée de  $v(t)$  pour  $t \ll v_l/g$ . Commenter.

- c) En déduire l'équation horaire  $x(t)$ , sachant que :

$$\int \tanh u \, du = \ln \cosh u$$

Donner une expression approchée de  $x(t)$  jusqu'au terme en  $t^4$  inclus. Commenter.

- d) On reprend l'étude de la chute des deux billes. Dans les deux cas, on admet la même valeur  $\beta = 12 \times 10^{-4}$  SI. Calculer  $v_l$  dans les deux cas. Montrer que le mouvement de  $B_1$  est une chute libre dans le vide, avec une excellente précision relative que l'on calculera.
- e) Quelle est la distance parcourue par la bille  $B_2$  pendant la durée de chute de  $B_1$  ? En déduire l'écart entre les deux billes en fin de chute. Commenter.

### B. Cycles moteurs de Carnot, Beau de Rochas et Stirling

Après une étude graphique des machines dithermes, à l'aide du diagramme de Raveau, et une vérification expérimentale de l'expression de l'entropie d'un gaz parfait, on compare les efficacités des cycles moteurs de Carnot, Beau de Rochas et Stirling. Ce dernier cycle présente des caractéristiques intéressantes, notamment un faible niveau de pollution, une durée de vie élevée et une excellente efficacité.

#### 1. Machine ditherme

Une masse  $m$  de gaz, constituée principalement d'air, subit un cycle moteur entre deux sources thermiques, l'une la source froide à la température  $T_f = 290 \text{ K}$ , l'autre la source chaude à la température  $T_c = 1450 \text{ K}$ .

- a) Exprimer les bilans d'énergie et d'entropie au cours d'un cycle réel. On introduira les quantités algébriques suivantes, relatives à un cycle :  $W$ ,  $Q_f$ ,  $Q_c$ ,  $S^p$  ;  $W$  est le travail reçu (algébriquement) par le fluide (si  $W > 0$ , il est effectivement reçu par le fluide, si  $W < 0$ , il est effectivement fourni par le fluide). De même  $Q_f$  est la chaleur reçue par le fluide de la part de la source froide ;  $Q_c$  est la chaleur reçue par le fluide de la part de la source chaude. Dans l'écriture de  $S^p$ , qui désigne l'entropie produite,  $p$  est un indice et non un exposant.
- b) Représenter, sur un même graphe, donnant  $Q_c$  en fonction de  $Q_f$ , appelé diagramme de Raveau, les deux équations précédentes,  $W$  et  $S^p$  étant des quantités déterminées. En déduire la position du point de fonctionnement sur le diagramme, compte tenu des signes de  $W$  et  $S^p$ , ainsi que le sens des échanges thermiques (signes de  $Q_c$  et  $Q_f$ ).

- c) Etablir l'expression de l'efficacité  $\eta$  du moteur, appelée aussi rendement, en fonction de  $T_c, T_f, Q_c$  et  $S^p$ .
- d) Que devient cette efficacité lorsque la machine ditherme fonctionne selon un cycle de Carnot ? Calculer sa valeur  $\eta_C$ . Ce résultat, sensiblement inférieur à 1, doit-il être attribué à une imperfection de la machine (frottements divers) ou provient-il d'une limitation fondamentale ? Dans ce dernier cas, préciser la nature de cette limitation.
- e) On définit le degré d'irréversibilité du cycle à l'aide du rapport  $r = \eta / \eta_C$ . Sachant que  $r = 0,94$  et que le moteur fournit un travail de 15 kJ par cycle, trouver  $Q_c, Q_f$  et  $S^p$ . Porter avec soin ces résultats sur un graphe, donnant  $Q_c$  en fonction de  $Q_f$ , dans lequel 1 cm représente 5 kJ.

## 2. Entropie d'un gaz parfait

- a) Le rapport  $\gamma$  des capacités thermiques isobare et isochore d'un gaz parfait est 1,67 pour un gaz monoatomique, tel que l'argon, et 1,4 pour un gaz diatomique, tel que l'air. Justifier ces valeurs à l'aide de considérations simples issues de la théorie cinétique des gaz ?
- b) Etablir l'expression de la variation élémentaire de l'entropie d'un gaz parfait monoatomique en fonction de sa température  $T$  et de sa pression  $p$ . Montrer que l'entropie du gaz peut s'écrire :

$$S = \alpha(-\ln p + \beta \ln T + \text{Cte})$$

$\alpha$  étant un coefficient que l'on exprimera, en fonction du nombre  $n$  de moles et de la constante  $R$  des gaz parfaits, et  $\beta$  un facteur que l'on déterminera. La constante Cte qui apparaît dans la formule précédente a pu être déterminée expérimentalement à l'aide du graphe  $C_p(T)$  donnant la capacité thermique molaire de l'argon gazeux, sous 1 bar, en fonction de la température. Comment accède-t-on à l'entropie à partir de  $C_p(T)$  ?

- c) Dans le cas d'un gaz parfait diatomique,  $\beta = 7/2$ . En déduire la relation entre la pression et la température d'un gaz parfait diatomique au cours d'une évolution isentropique.

## 3. Cycle de Beau de Rochas et Otto

Dans un moteur à explosion, le fluide, de masse  $m = 2,9$  g, assimilé à un gaz parfait diatomique, de masse molaire  $M = 29$  g, suit une évolution cyclique réversible  $ABCD$ , constituée de deux portions isentropiques,  $AB$  et  $CD$ , séparées par deux portions isochores,  $BC$  et  $DA$ . Le cycle n'est plus ditherme : il y a mise en contact du fluide avec une succession de sources chaudes et froides. Les températures et les pressions aux points  $A$  et  $C$  sont, respectivement :

$$T_A = 290 \text{ K} \quad p_A = 1 \text{ bar} \quad T_C = 1450 \text{ K} \quad p_C = 40 \text{ bar}$$

En outre, le taux de compression  $\alpha_v = V_A/V_C$  est égal à 8.

- a) Quelle équation relie la pression et le volume le long des courbes  $AB$  et  $CD$  ? Calculer les pressions, en bar,  $p_B$  et  $p_D$ , en  $B$  et  $D$  respectivement, ainsi que les volumes en litre en ces points.
- b) Représenter avec soin le cycle  $ABCD$  dans le diagramme de Clapeyron ( $p, V$ ). Justifier le sens de description du cycle.
- c) Calculer, en kJ, le travail et la chaleur reçus (algébriquement) par le gaz sur chaque portion du cycle. Vérifier l'existence d'une relation simple entre toutes les grandeurs calculées.
- d) Quelle est l'efficacité  $\eta_{BO}$  de ce cycle moteur, c'est-à-dire le rapport du travail fourni au milieu extérieur sur la chaleur reçue de la part des sources chaudes représentées sur la portion  $BC$  du diagramme ? Comparer  $\eta_{BO}$  à l'efficacité  $\eta_C$  d'un cycle moteur ditherme fonctionnant entre les températures  $T_A$  et  $T_C$ . Commenter.

#### 4. Cycle de Stirling

Dans un cycle de Stirling, une même masse d'air ( $m = 2,9 \text{ g}$ ) suit une évolution cyclique réversible  $A'B'C'D'$ , constituée de deux portions isothermes  $A'B'$  et  $C'D'$  séparées par deux portions isochores  $B'C'$  et  $D'A'$ . Les températures et les pressions aux points  $A'$  et  $C'$  sont les mêmes qu'aux points  $A$  et  $C$  respectivement. Le taux de compression  $\alpha_v = V_A/V_C$  est aussi le même que précédemment.

- a) Quelle équation relie la pression et le volume le long des courbes  $A'B'$  et  $C'D'$  ? En déduire les pressions  $p_{B'}$  et  $p_{D'}$ , en  $B'$  et  $D'$ , respectivement.
- b) Représenter avec soin le cycle  $A'B'C'D'$  dans le diagramme de Clapeyron. Comparer ce diagramme au précédent.
- c) Calculer le travail et la chaleur reçus (algébriquement) par le gaz sur chaque portion du cycle.
- d) Les échanges thermiques au cours des évolutions isochores se font à l'aide d'un régénérateur interne à la machine. Les seuls échanges thermiques avec l'extérieur ont lieu pendant les phases isothermes. Quelle est l'efficacité  $\eta_S$  de ce cycle moteur, c'est-à-dire le rapport du travail fourni au milieu extérieur sur la chaleur reçue de la part des sources chaudes représentées sur la portion  $C'D'$  du diagramme ? Comparer  $\eta_S$  à  $\eta_{BO}$  et  $\eta_C$ .

**Fin de l'énoncé.**