

# MATHÉMATIQUES I

## Définitions

Si  $f$  est une fonction de classe  $C^\infty$  définie sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}$  et à valeurs réelles, on notera, pour  $p \geq 1$ ,  $f^p = f \circ f \circ \dots \circ f$   $p$  fois, fonction définie sur le sous-domaine de  $\Omega$  défini par  $\{x \in \Omega \mid f(x) \in \Omega, f^2(x) \in \Omega, \dots, f^{p-1}(x) \in \Omega\}$ . On appelle  $p$ -cycle de  $f$  un ensemble de  $p$  éléments  $\{x_0, \dots, x_{p-1}\} \subset \Omega$  tel que  $f(x_0) = x_1, \dots, f(x_{p-2}) = x_{p-1}, f(x_{p-1}) = x_0$ . On appelle multiplicateur du cycle la quantité

$$(f^p)'(x_0) = f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_{p-1}).$$

Un point  $x \in \Omega$  est dit  $p$ -périodique s'il est élément d'un  $p$ -cycle ; un point 1-périodique est encore appelé point fixe. Le multiplicateur d'un point périodique  $x_0$  est alors le multiplicateur du cycle le contenant, qui n'est autre que le multiplicateur de  $x_0$  comme point fixe de  $f^p$ . Le cycle (ou le point  $p$ -périodique) sera dit attractif, super attractif, indifférent ou répulsif suivant que la valeur absolue de son multiplicateur est strictement inférieure à 1, égale à 0, égale à 1 ou strictement supérieure à 1.

On pourra être amené à utiliser un théorème de fonctions implicites dans  $\mathbb{R}^2$ .

On pourra alors admettre le résultat suivant :

**Théorème :** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ , et  $(x_0, y_0)$  un point de  $\Omega$ , tels que

$$F(x_0, y_0) = 0, \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Alors il existe  $\varepsilon, \eta > 0$  tels que si on pose  $I = ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ ,

$J = ]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$ , l'ouvert  $V = I \times J$  est inclus dans  $\Omega$  et il existe une

fonction  $g : ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[ \rightarrow ]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$  de classe  $C^1$  telle que :

$$\forall (x, y) \in V, F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x).$$

Le thème général du problème est l'étude globale de la méthode de Newton appliquée aux polynômes.

# Filière MP

## Partie I - La méthode de Newton pour les polynômes réels

Soit  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction polynomiale non constante et  $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid P'(x) \neq 0\}$ . Si  $x \in \Omega$ , on définit  $N_P(x)$  comme étant l'abscisse de l'intersection de la tangente en  $(x, P(x))$  au graphe de  $P$  avec l'axe des  $x$ .

**I.A -** Montrer que :

$$\forall x \in \Omega, N_P(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}.$$

**I.B -**

I.B.1) Si  $x \in \Omega$ , calculer  $N'_P(x)$ .

I.B.2) Soit  $a$  un nombre réel.

Montrer que si  $P(a) = 0$ ,  $P'(a) \neq 0$  alors  $a$  est un point fixe super attractif de  $N_P$ . Si  $a$  est un zéro d'ordre  $p \geq 2$  de  $P$  montrer que  $N_P$  peut se prolonger par continuité en  $a$  qui devient un point fixe attractif de  $N_P$  de multiplicateur  $1 - 1/p$ .

Si  $x \in \Omega$ , on dira que la suite de Newton de  $x$  par  $P$  est bien définie si l'on peut définir une suite  $(x_n)$  telle que  $x_0 = x$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \Omega \text{ et } x_{n+1} = N_P(x_n).$$

Dans ce cas, cette suite  $(x_n)$  sera la suite de Newton de  $x$  par  $P$ .

**I.C -** Montrer que si la suite de Newton de  $x$  par  $P$  est bien définie et converge vers  $a \in \mathbb{R}$  alors  $P(a) = 0$ .

**I.D -** Soit réciproquement  $a \in \mathbb{R}$  un zéro de  $P$ .

I.D.1) Montrer l'existence de  $\varepsilon > 0$  tel que si  $|y - a| < \varepsilon$  alors la suite de Newton de  $y$  par  $P$  est bien définie et converge vers  $a$ .

On appelle  $I(a)$  le plus grand intervalle contenant  $a$  et formé de points dont la suite de Newton par  $P$  converge vers  $a$ .

I.D.2) Montrer que c'est un intervalle ouvert ; on l'appelle le bassin immédiat de  $a$ .

## MATHÉMATIQUES I

Filière MP

**I.E -**

I.E.1) On suppose que  $P$  a au moins deux racines réelles. Soit  $a^-$  le plus petit zéro de  $P$  ; on suppose que  $\xi$ , le plus petit zéro de  $P'$  vérifie  $\xi > a^-$  et que  $P''$  ne s'annule pas sur  $] -\infty, \xi [$ . Montrer que le bassin immédiat de  $a^-$  est égal à  $] -\infty, \xi [$ .

I.E.2) On suppose que le bassin immédiat du zéro  $\alpha$  de  $P$  est de la forme  $] \alpha, \beta [$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Montrer successivement que  $N_P([\alpha, \beta[) \subset ] \alpha, \beta [$ , que  $P(\alpha)P'(\alpha)P(\beta)P'(\beta) \neq 0$ , et enfin que  $N_P(\alpha) = \beta$ ,  $N_P(\beta) = \alpha$ . Ce 2-cycle peut-il être attractif ?

**I.F** - Les hypothèses de la question I.E.2 étant toujours vérifiées, montrer que le bassin immédiat de  $\alpha$  contient un zéro de  $P''$ .

**I.G** - On suppose  $P$  de degré  $d \geq 2$  possédant  $d$  zéros distincts. Montrer que  $N_P$  attire tout zéro de  $P''$  vers un zéro de  $P$ .

*Partie II - Étude algébrique*

Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  de degré  $d$  (on note  $d^\circ(P) = d$ ). Dans cette partie la dérivation est à prendre au sens de la dérivation formelle des polynômes ou plus généralement des fractions rationnelles et  $N_P$  est la fraction rationnelle

$$N_P(X) = X - \frac{P(X)}{P'(X)}.$$

**II.A** - Montrer que si  $P$  a  $d$  zéros distincts alors  $R = N_P$  vérifie

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} R = \frac{Q}{S}, Q, S \in \mathbb{C}[X], \text{PGCD}(Q, S) = 1, d^\circ(Q) = d, d^\circ(S) = d - 1 \\ \text{et } R \text{ possède } d \text{ points fixes super attractifs} \end{array} \right.$$

(Un point fixe super attractif de  $R$  est un point  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $R(z) = z$ ,  $R'(z) = 0$ ).

**II.B** - Soit réciproquement  $R$  une fraction rationnelle vérifiant (\*). Montrer qu'il existe  $P \in \mathbb{C}[X]$ , de degré  $d$ , possédant  $d$  zéros distincts, tel que  $R = N_P$ .

**II.C** - Deux fractions rationnelles  $f, g$  sont dites semblables s'il existe une similitude  $T(z) = az + b$  ( $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$ ) telle que si  $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$  désignent les domaines de définition de  $f, g$  (c'est-à-dire le complémentaire dans  $\mathbb{C}$  de l'ensemble des pôles) alors  $T(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$  et

$$\forall z \in \mathcal{D}', f(z) = T^{-1} \circ g \circ T(z).$$

## MATHÉMATIQUES I

Filière MP

Si  $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$  et si  $T(z) = az + b$  montrer que  $N_{P \circ T}$  est semblable à  $N_P$ .

**II.D** - Déterminer  $N_P$  pour  $P(X) = X^2, P(X) = X^2 - 1$  : montrer que si  $P$  est un polynôme de degré 2 alors  $N_P$  est semblable à  $z \mapsto \frac{z}{2}$  ou bien à  $z \mapsto \frac{z}{2} + \frac{1}{2z}$ .

**II.E** - Pour  $m \in \mathbb{C}$  on définit

$$P_m(z) = z^3 + (m-1)z - m = (z-1)(z^2 + z + m), N_m(z) = N_{P_m}(z)$$

Montrer que si  $P$  est un polynôme de degré 3 alors soit  $N_P$  est semblable à  $z \mapsto \frac{2z}{3}$  soit il existe  $m \in \mathbb{C}$  tel que  $N_P$  est semblable à  $N_m$ .

**II.F** - Quel est l'intérêt des résultats des deux questions précédentes pour l'étude des suites de Newton par les polynômes de degré  $\leq 3$  ?

## Partie III - Étude analytique du cas cubique réel

Dans cette partie on suppose  $m \in \mathbb{R}$ , on garde les notations du II.E et on s'intéresse au comportement des suites de Newton des nombres réels par  $P_m$ .

**III.A -**

III.A.1) Montrer que  $P_m$  a trois zéros (complexes) distincts si et seulement si  $m \neq -2, m \neq 1/4$ .

III.A.2) On suppose  $m > 1$  : montrer que la suite de Newton de tout réel  $x$  par  $P_m$  est définie et converge vers un réel à préciser.

**III.B -**

III.B.1) Montrer que si  $m' < 1/4, m' \neq -2$  alors  $P_{m'}$  possède trois zéros réels distincts, soient :

$$1, a_{m'} = \frac{-1 + \sqrt{1-4m'}}{2}, b_{m'} = \frac{-1 - \sqrt{1-4m'}}{2}.$$

Si de plus  $m' < 0$ , montrer qu'il existe  $m \in ]0, 1/4[$  tel que  $N_{m'}$  soit semblable à  $N_m$ .

III.B.2) On supposera désormais dans cette partie que  $m \in [0, 1/4[$ .  $P_m$  possède alors trois zéros réels distincts, soient :

$$1, a_m = \frac{-1 + \sqrt{1-4m}}{2}, b_m = \frac{-1 - \sqrt{1-4m}}{2}.$$

III.B.3) On pose  $x_0^\pm = \pm \sqrt{\frac{1-m}{3}}$  et on désigne par  $]\alpha(m), \beta(m)[$  le bassin immédiat de  $a_m$ . Montrer que la fonction  $x \mapsto |N'_m(x)|$  est strictement décroissante sur  $]x_0^-, a_m[$  et strictement croissante sur  $]0, x_0^+[$ .

## MATHÉMATIQUES I

Filière MP

III.B.4) Montrer que la fonction  $M_m = N_m \circ N_m$  est définie sur un intervalle  $]x_1^-, x_1^+[ \subset ]x_0^-, x_0^+[$  où  $N_m(x_1^-) = x_0^+$ ,  $N_m(x_1^+) = x_0^-$ .

On désigne par  $\xi^-$ ,  $\xi^+$  le plus petit et le plus grand zéro de  $M'_m$ . Montrer que la fonction  $M'_m$  est strictement décroissante sur  $]x_1^-, \xi^-[$  et strictement croissante sur  $] \xi^+, x_1^+[$ .

III.B.5) Montrer que l'intervalle  $[\xi^-, \xi^+]$  est inclus dans le bassin immédiat de  $a_m$ .

III.B.6) Dédire de III.B.4 et III.B.5 que  $\{\alpha(m), \beta(m)\}$  est le seul 2-cycle de  $N_m$ .

III.B.7) Montrer que  $\alpha(0) = -\beta(0)$  et en déduire que  $\alpha(0) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

III.B.8) On pose  $F(m, x) = M_m(x) - x$ . Si  $u$  est un réel, un développement limité à l'ordre 1 de la fonction

$$m \mapsto F(m, -\frac{1}{\sqrt{5}} + um)$$

peut être obtenu grâce à un logiciel de calcul formel. On trouve :

$$\left(35u + \frac{25 - 7\sqrt{5}}{2}\right)m + o(m).$$

En déduire, avec toutes les justifications nécessaires, un développement limité à l'ordre 1 de  $\alpha$  en 0.

## III.C -

III.C.1) Montrer qu'il existe une et une seule valeur  $m_0$  de  $m \in \mathbb{R}$  telle que 0 soit 2-périodique pour  $N_m$ . Donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près par défaut de  $m_0$  en indiquant l'algorithme utilisé.

III.C.2) Montrer qu'il existe  $\eta > 0$  tel que si  $|m - m_0| < \eta$  alors  $N_m$  admet un cycle attractif d'ordre 2 qui attire 0.

---

••• FIN •••

---