SESSION 2000

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°99-018 du 01.02.99.

Préambule

Dans ce problème, on se propose d'étudier des familles de matrices que l'on rencontre lors de la résolution numérique de problèmes relatifs à des équations aux dérivées partielles de type elliptique par des méthodes de différences finies.

Matrices irréductibles - Matrices à diagonales faiblement ou fortement dominantes.

Notations :
Dans tout le problème, on suppose que N est un entier supérieur ou égal à 2.
$\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles à N lignes et N colonnes, $\mathcal{M}_{N,P}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à N lignes et P colonnes.

I_N est la matrice unité de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. $\mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques à N lignes et N colonnes. Si $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, ($A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tA = A$).

Si A appartient à $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ on pourra écrire $A = (a_{ij})$ $i = 1,\dots,N$ $j = 1,\dots,N$.

a_{ij} étant l'élément de la *i-ème* ligne et de la *j-ème* colonne de A.

$(u,v) \mapsto (u \mid v)_N$ de $(\mathbb{R}^N)^2$ dans $\mathbb{R}$ désigne le produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^N$. On identifiera $\mathbb{R}^N$ et $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ et pour $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $v \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ on écrira par exemple $(Av \mid v)_N$ le produit scalaire des éléments de $\mathbb{R}^N$ correspondants : on a donc, en raison de l'identification $(Av \mid v)_N = {}^tvAv$.

W_N est l'ensemble des N premiers entiers strictement positifs.

Rappel : une matrice réelle symétrique est dite positive (définie positive) si ses valeurs propres sont positives (strictement positives).

Tournez la page S.V.P.

Définition 1 :

Soient $(e_1, e_2, \dots, e_N)$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$ et σ une permutation de l'ensemble $\{1,2,\dots,N\}$. On appellera matrice de permutation P_σ associée à σ, la matrice P_σ de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que $P_\sigma e_i = e_{\sigma(i)}$. Alors $P_\sigma = \left(\delta_{i\sigma(j)}\right)$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Définition 2 :

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})$ est irréductible si pour tout couple (S, T) de parties de W_N telles que $S \cap T = \varnothing$ et $S \cup T = W_N$, il existe un élément $a_{ij} \neq 0$ avec $i \in S$ et $j \in T$.

Dans le cas contraire on dira que A est réductible.

Définition 3 :

$A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ $A = (a_{ij})$ est à diagonale faiblement dominante si :

1) pour tout indice $i \in W_N$, $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} |a_{ij}|$

2) pour au moins un indice $i \in W_N$, $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} |a_{ij}|$

Définition 4 :

$A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est à diagonale fortement dominante si, pour tout indice $i \in W_N$, $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} |a_{ij}|$

Première partie

Question 1-1

a) Soient σ et σ' deux permutations de l'ensemble W_N.

a.1) Montrer que $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\sigma'}$.

a.2) Montrer que P_σ est inversible et que $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

a.3) Montrer que $P_\sigma^{-1} = {}^tP_\sigma$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $P_\sigma \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ la matrice associée à la permutation σ. On définit $B = P_\sigma^{-1} A P_\sigma = (b_{ij})$. Exprimer b_{ij} à l'aide de σ.

c) Montrer que $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est irréductible si et seulement s'il n'existe pas de matrice de permutation P_σ telle que $P_\sigma^{-1} A P_\sigma$ soit de la forme :

$$P_\sigma^{-1} A P_\sigma = \begin{pmatrix} F & O \\ G & H \end{pmatrix}$$

où F et H sont des matrices appartenant respectivement à $\mathcal{M}_P(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{N-P}(\mathbb{R})$ et O une matrice dont tous les éléments sont nuls.

Question 1-2

a) Soit $C \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que $C = \begin{pmatrix} F & O \\ G & H \end{pmatrix}$ où F et H appartiennent respectivement à $\mathcal{M}_P(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{N-P}(\mathbb{R})$ et sont inversibles. Résoudre le système linéaire $CX = U$ où $X \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ est la matrice des inconnues et $U \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ est donnée. On utilisera pour cela une décomposition convenable de X et de U en blocs $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.

b) On suppose que $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est réductible. Proposer une méthode de résolution du système $AX = U$.

Question 1-3

On veut montrer que $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est irréductible si et seulement si la propriété (P) suivante est vérifiée :

(P) pour tout couple (i, j) d'indices distincts de W_N, $a_{ij} \neq 0$ ou alors il existe un entier s et des indices $i_1, i_2, \ldots, i_s$ tels que le produit $a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s j}$ soit non nul.

a) Etablir que la condition est suffisante.

b) On suppose maintenant que $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est irréductible. Pour chaque indice $i \in W_N$, on définit X_i comme l'ensemble des indices j de W_N tels que :

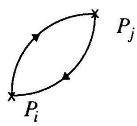
$$\begin{cases} 1)\ j \neq i \\ 2)\ \text{soit } a_{ij} \neq 0 \\ \quad\ \text{soit il existe } i_1, \ldots, i_s \text{ tels que le produit } a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_{s-1} i_s} a_{i_s j} \text{ soit différent de } 0. \end{cases}$$

Montrer que $X_i = W_N \setminus \{i\}$ et en déduire que la condition est nécessaire.

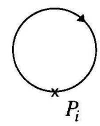
Tournez la page S.V.P.

Question 1-4

Le concept d'irréductibilité peut être illustré graphiquement.
Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$ et $\{P_i \mid i \in W\}$ un ensemble de N points distincts du plan. Pour chaque couple $(i,j) \in (W_N)^2$ tel que $a_{ij} \neq 0$, on trace une flèche allant du point P_i vers le point P_j. Si a_{ij} et a_{ji} sont non nuls, il y aura une flèche du point P_i vers le point P_j et une autre de P_j vers P_i. Si $a_{ii} \neq 0$ on pourra tracer une boucle allant de P_i vers lui-même.



$a_{ij} \neq 0$ et $a_{ji} \neq 0$



$a_{ii} \neq 0$

On associe ainsi à chaque matrice ce que l'on appelle un graphe orienté.
En étudiant les graphes associés aux deux matrices suivantes :

$$A_1 \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donner une interprétation graphique du caractère réductible ou irréductible de chacune d'elles.

Deuxième partie

Question 2-1

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ à diagonale fortement dominante ; soit $U \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ tel que $AU = 0$ $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$; soit i, un indice tel que $|u_i| = \max\{|u_1|, \ldots, |u_N|\}$. En considérant la *i-ème* ligne du produit AU montrer que l'on a nécessairement $U = 0$. Que peut-on en déduire pour $\det A$?

Question 2-2

On suppose que $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est irréductible et à diagonale faiblement dominante.

a) Montrer qu'alors pour tout indice $i \in W_N$, $|a_{ii}| > 0$.

b) Montrer que $\det A \neq 0$. Pour cela, on raisonnera comme dans la question 2-1 et on montrera d'abord que si $AU = 0$, tous les éléments de la matrice colonne U sont nécessairement égaux en valeur absolue.

Question 2-3

a) Si $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est une matrice dont les éléments diagonaux sont ≥ 0 et si, de plus, elle est à diagonale faiblement dominante, montrer que toutes les valeurs propres de A sont ≥ 0.

b) Si, de plus, A est irréductible ou inversible, on montrera que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

Troisième partie

Définition 5 :
Une matrice $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est une L-matrice si :

1) pour tout indice $i \in W_N$, on a $a_{ii} > 0$
2) pour tout couple d'indices $(i, j) \in (W_N)^2$ tels que $i \neq j$, on a $a_{ij} < 0$

Définition 6 :
Une matrice $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est une S-matrice si :

1) A est définie positive,
2) pour tout couple d'indices $(i, j) \in (W_N)^2$ tels que $i \neq j$, on a $a_{ij} < 0$

Définition 7 :
Une matrice $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est une M-matrice si :

1) pour tout couple d'indices $(i, j) \in (W_N)^2$ tels que $i \neq j$, on a $a_{ij} < 0$,
2) A est inversible,
3) tous les éléments de A^{-1} sont ≥ 0.

Question 3-1

a) Soit $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ définie positive, montrer qu'alors $a_{ii} > 0$ pour tout indice $i \in W_N$. En déduire que $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est une S-matrice si et seulement si A est une L-matrice définie positive.

b) Montrer que toute M-matrice est une L-matrice.

Tournez la page S.V.P.

c) Montrer que si $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ est une L-matrice

1) irréductible,

2) à diagonale faiblement dominante,

alors A est une S-matrice.

Question 3-2

Le spectre de Q est, par définition, l'ensemble des valeurs propres réelles ou complexes de Q. $Sp(Q) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \det(Q - \lambda I_N) = 0\}$. On appelle alors rayon spectral de Q, $S(Q) = \max_{\lambda \in Sp(Q)} |\lambda|$.

a) Si $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, montrer que la série $\sum_{k \geq 0} Q^k$ est convergente si et seulement si $S(Q) < 1$.

On admettra l'équivalence : $Q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow S(Q) < 1$.

Dans toute la suite de la question 3-2, on considère une L-matrice A d'ordre N et D la matrice diagonale ayant la même diagonale que A, donc définie par :

$$\left|\begin{array}{l}\text{Pour tout couple d'indices } (i,j) \in (W_N)^2 \text{ tels que } i \neq j, \text{ on a } d_{ij} = 0 \\ \text{Pour tout indice } i \in W_N, \text{ on a } d_{ii} = a_{ii}\end{array}\right.$$

Soit $C = (c_{ij})$ appartenant à $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, telle que $A = D - C$ et soit $B = D^{-1}C$ (on justifiera l'existence de D^{-1}).

On suppose que $S(B) < 1$.

b) Justifier le fait que $I_N - B$ est inversible et montrer que tous les éléments de $(I_N - B)^{-1}$ sont positifs ou nuls.

c) Montrer que A est inversible et que A est une M-matrice.

Question 3-3

Si D est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, on définit $D^{1/2}$ et $D^{-1/2}$ matrices diagonales dont les éléments diagonaux sont respectivement $\sqrt{d_{ii}}$ et $\frac{1}{\sqrt{d_{ii}}}$ pour tout indice $i \in W_N$.

Soit A une M-matrice.

On définit D, C, B comme à la question précédente et $\hat{A} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ par $\hat{A} = D^{-1/2}AD^{-1/2} = I_N - D^{-1/2}CD^{-1/2}$ et $\hat{B} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ par $\hat{B} = D^{1/2}BD^{-1/2}$.

a) Montrer que $\hat{A}$ est une M-matrice et que :
$\left(\hat{A}\right)^{-1} = \left(I_N - \hat{B}\right)^{-1} = I_N + \hat{B} + \left(\hat{B}\right)^2 + \ldots + \left(\hat{B}\right)^m + \left(I_N - \hat{B}\right)^{-1}\left(\hat{B}\right)^{m+1}$ pour tout entier m strictement positif.

b) Soit $G_m \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ définie par : $G_m = I_N + \hat{B} + \ldots + \left(\hat{B}\right)^m$. Montrer que tous les éléments de G_m sont positifs et majorés indépendamment de m.

c) En déduire que $S(B) < 1$.

Question 3-4

Soit $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ une S-matrice.
On utilise les mêmes notations qu'en **3-2** et **3-3**.

a) Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = \left(I_N - B\right)^{-1} D^{-1}$.

b) On veut maintenant montrer que $S(B) < 1$ ce qui suffira pour établir que toute S-matrice est une M-matrice.

- b1) Montrer que $\hat{A}$ est définie positive.
- b2) En supposant $S(B) \geq 1$, montrer que l'on est conduit à une contradiction et que donc toute S-matrice est une M-matrice. On admettra que si $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ a tous ses éléments positifs ou nuls, alors, il existe $\mu \in Sp(Q)$ tel que $\mu = S(Q)$.

Fin de l'énoncé.