e3a Physique et Chimie PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julien Dumont (Professeur en CPGE) et Vincent Wieczny (ENS Lyon) ; il a été relu par Cyril Ravat (Professeur en CPGE) et Alexandre Herault (Professeur en CPGE).

Le sujet est composé de trois problèmes indépendants, deux de physique et un de chimie.

- Le premier problème de physique porte sur l'étude d'un capteur capacitif utilisé pour déterminer le niveau de gazole dans une citerne. Ce problème, très proche du cours d'électrostatique, permet de vérifier si le cours est bien assimilé tout en proposant une application concrète.
- Le second problème de physique étudie la vidange d'une telle citerne. La relation de Bernoulli étant donnée, on construit progressivement les éléments permettant d'évaluer le temps de cette vidange.
- La dernière partie a pour thème la chimie des carburants. L'étude commence par le cas idéal d'une combustion complète du gazole, permettant de confirmer des données numériques issues d'un document en annexe. Néanmoins, la combustion est en pratique incomplète, d'où l'émission de polluants azotés : deux d'entre eux sont abordés pour juger de leur stabilité cinétique ou pour les quantifier à la sortie du pot d'échappement. Les questions sont classiques et certaines applications numériques peuvent être confortées par les données en annexe.

Le sujet est tout à fait adapté à la filière car il couvre des domaines variés du programme tout en restant assez proche du cours et des exercices de base. Sa longueur nécessitait d'avoir de bons réflexes si l'on voulait avancer suffisamment dans le temps imparti. C'est un très bon sujet de révision qui vaut la peine que l'on s'y attarde.

Indications

Partie I

A.1 Donner l'équation de Maxwell-Gauss et la combiner avec la relation entre le champ électrique et le potentiel.

A.5 Il faut utiliser les deux expressions du champ électrique qui ont été établies dans les questions précédentes.

B.3 Attention aux unités : la formule donne la capacité en pF.

C.6 Si on veut retenir la valeur moyenne, il faut utiliser un filtre ne retenant que la composante continue : c'est un filtre passe-bas.

C.10 Calculer l'atténuation due au filtre qui s'applique à la première harmonique.

Partie II

D.4 Effectuer une intégration par séparation de variables.

F.1 De nombreuses questions de cette partie sont indépendantes et sont uniquement des applications numériques. Ne pas hésiter à en sauter certaines.

G.1 Attention à bien compter deux coudes brusques. Les formules donnant les valeurs numériques des coefficients sont indiquées dans l'annexe.

Partie III

H.1 Une réaction de combustion complète ne produit que du dioxyde de carbone $CO_{2(g)}$ et de la vapeur d'eau $H_2O_{(g)}$.

H.3 Déterminer les nombres d'oxydation moyens de l'élément carbone au sein des espèces carbonées pour déterminer leur nature oxydante ou réductrice.

H.5 Calculer la constante d'équilibre de la réaction de combustion complète du gazole.

H.7 Montrer en quoi les hypothèses auxquelles on fait appel pour le calcul de température de flamme ne sont pas vérifiées.

I.6 Une réaction d'oxydoréduction est considérée comme quantitative dès lors que la différence de potentiel entre les deux couples est supérieure à 0,25 V.

I.7 La couleur absorbée est complémentaire de la couleur observée en solution.

I.9 Passer en quantité de matière pour trouver à la concentration massique initiale en pentaoxyde de diazote $N_2O_{5(g)}$.

I. Capteur de niveau

A.1 Le champ électrique $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ dérive du potentiel V qui ne dépend, d'après l'énoncé, que de x entre les armatures. On sait de plus que l'espace est vide de charges électriques, ainsi l'équation de Maxwell-Gauss et la relation champ-potentiel s'écrivent

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathrm{E}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\mathrm{V}$$

soit
$$\Delta \mathrm{V} = 0$$

Autrement dit
$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x^2} = 0}$$

A.2 En intégrant deux fois, on obtient

$$\mathrm{V}(x) = c_1 x + c_2$$

où c_1 et c_2 sont des constantes d'intégration. Or,

$$\mathrm{V}(0) = c_2 = \mathrm{V}_1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(e) = c_1 e + c_2 = \mathrm{V}_2$$

soit
$$c_2 = \mathrm{V}_1 \qquad \text{et} \qquad c_1 = \frac{\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_1}{e}$$

et finalement
$$\boxed{\mathrm{V}(x) = \frac{\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_1}{e}\, x + \mathrm{V}_1}$$

A.3 En utilisant la relation indiquée à la question A.1, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\mathrm{V} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\,\overrightarrow{e_x}$$

et donc
$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}} = -\frac{\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_1}{e}\,\overrightarrow{e_x}}$$

Il s'agit donc d'un **champ uniforme** (c'est-à-dire indépendant de la position dans l'espace, ici la variable x) dont l**es lignes de champs sont des droites parallèles à** $\overrightarrow{e_x}$. Si $\mathrm{V}_1 > \mathrm{V}_2$, ces lignes de champs sont orientées depuis la plaque de potentiel V_1 vers celle de potentiel V_2.

A.4 Considérons un cylindre C d'axe $(\mathrm{O}x)$, dont l'une des bases est positionnée à une abscisse x comprise entre 0 et e et l'autre à une abscisse négative. Notons $\mathrm{S_b}$ la surface de cette base ($\mathrm{S}+$ pour celle située à l'abscisse positive, $\mathrm{S}-$ à l'abscisse négative, avec bien entendu $\mathrm{S}+ = \mathrm{S}- = \mathrm{S_b}$) et L la surface latérale. Décomposons le flux du champ $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ à travers la surface totale de ce cylindre, qui est une surface fermée.

$$\Phi_{\mathrm{C}}(\overrightarrow{\mathrm{E}}) = \oint_{\mathrm{C}} \overrightarrow{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = \iint_{\mathrm{S}-} \overrightarrow{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} + \iint_{\mathrm{S}+} \overrightarrow{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} + \iint_{\mathrm{L}} \overrightarrow{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}}$$

Or, les lignes de champ électrique sont colinéaires à $\overrightarrow{e_x}$, ce qui signifie qu'elles sont perpendiculaires à $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}}$ sur toute la surface latérale du cylindre : le produit scalaire est donc nul. Le champ étant nul sur la base $\mathrm{S}-$ d'après l'énoncé, il ne reste que l'intégrale sur $\mathrm{S}+$. Sur cette base, le champ est constant puisque tous les points de la surface sont à une même valeur de x ; de plus, $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}}$ est alors colinéaire avec le champ. Finalement

$$\Phi_{\mathrm{C}}(\overrightarrow{\mathrm{E}}) = \oint_{\mathrm{C}} \overrightarrow{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = \iint_{\mathrm{S}+} \overrightarrow{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = \iint_{\mathrm{S}+} \mathrm{E}(x)\,\mathrm{dS} = \mathrm{E}(x) \iint_{\mathrm{S}+} \mathrm{dS} = \mathrm{E}\,\mathrm{S_b}$$

Le théorème de Gauss affirme que ce flux vaut la charge contenue dans le cylindre divisée par la permittivité électrique du milieu. La plaque située en $x = 0$ porte la charge surfacique $\sigma = \mathrm{Q}_1/\mathrm{S}$; par conséquent la charge contenue dans le cylindre vaut

$$\mathrm{Q}_{\mathrm{in}} = \sigma \mathrm{S}_{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{Q}_1\, \mathrm{S}_{\mathrm{b}}}{\mathrm{S}}$$

soit

$$\mathrm{S}_{\mathrm{b}}\, \mathrm{E} = \frac{\mathrm{S}_{\mathrm{b}} \mathrm{Q}_1}{\mathrm{S}\, \varepsilon_0}$$

donc

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{Q}_1}{\mathrm{S}\, \varepsilon_0}\, \overrightarrow{e_x}}$$

> Il est amusant de remarquer que la forme de la surface de base n'importe pas dans la démonstration. En effet, le flux latéral reste nul et l'intégrale sur S+ ne dépend que de la valeur de la surface et non de sa forme. On peut donc tout à fait prendre une surface de base ayant la forme d'un carré, d'un triangle, d'une banane, d'un éléphant... et obtenir le résultat.

A.5 En utilisant les résultats des questions A.3 et A.4, on parvient à

$$-\frac{\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_1}{e} = \frac{\mathrm{Q}_1}{\mathrm{S}\, \varepsilon_0}$$

autrement dit

$$\mathrm{Q}_1 = \frac{\varepsilon_0\, \mathrm{S}}{e}\, (\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2)$$

Or, par définition de la capacité C d'un condensateur, on a la relation

$$\mathrm{Q}_1 = \mathrm{CU} = \mathrm{C}(\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2)$$

soit par identification

$$\boxed{\mathrm{C} = \frac{\varepsilon_0\, \mathrm{S}}{e}}$$

B.1 Deux condensateurs en parallèle sont soumis à la même tension U (puisqu'elle se conserve en dérivation). Soit Q_1 et Q_2 les charges portées respectivement par les armatures des condensateurs C_1 et C_2. On a

$$\mathrm{Q}_1 = \mathrm{C}_1 \mathrm{U} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q}_2 = \mathrm{C}_2 \mathrm{U}$$

La charge totale portée est $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2$, soit

$$\mathrm{Q} = \mathrm{CU} = \mathrm{C}_1 \mathrm{U} + \mathrm{C}_2 \mathrm{U} = (\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2)\mathrm{U}$$

La capacité du condensateur équivalent à deux condensateurs en parallèle est la somme de leurs capacités.

B.2 Le condensateur constitué par le système étudié est équivalent à la mise en parallèle de deux condensateurs plan, de capacités respectives d'après l'énoncé

$$\mathrm{C}_{\mathrm{air}} = \frac{\varepsilon_0\, (\mathrm{H} - h)\mathrm{L}}{e} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{C}_{\mathrm{gazole}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}}\, h\mathrm{L}}{e}$$

> La difficulté de cette question est de bien calculer les surfaces totales des armatures correspondant aux deux condensateurs plans étudiés.
>
> Notons également que l'expression proposée au début de cette partie pour la capacité permet de confirmer le résultat obtenu à la question A.5.

D'après la question B.1, la capacité recherchée est la somme de ces deux capacités.

$$\boxed{\mathrm{C}(h) = \frac{\varepsilon_0\, \mathrm{L}}{e}\, ((\mathrm{H} - h) + \varepsilon_{\mathrm{r}}\, h)}$$