X Physique et Sciences de l'ingénieur MP 2016 Corrigé

Ce corrigé est proposé par Olivier Frantz (Professeur agrégé en école d'ingénieur) ; il a été relu par Cyril Ravat (Professeur en CPGE) et Julien Dumont (Professeur en CPGE).

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants, l'un portant sur l'électromagnétisme et la physique quantique, l'autre sur les sciences de l'ingénieur, avec de la mécanique du solide et des asservissements.

- Le premier sujet se compose de trois parties distinctes qui traitent de propagation dans des milieux inhomogènes. Il s'agit tout d'abord d'étudier une onde électromagnétique dans une fibre optique dont l'indice varie légèrement avec le rayon. Ensuite, les questions portent sur un milieu stratifié, c'est-à-dire dont l'indice varie selon une seule direction. On cherche à montrer que l'onde a localement la structure d'une onde plane. Enfin, la dernière partie porte sur l'analyse de l'équation de Schrödinger dans l'approximation semi-classique.
- Le deuxième sujet porte sur un simulateur de conduite de véhicule à deux roues. L'étude cinématique est assez ardue et nécessite une bonne compréhension des trois pages consacrées à la description du système. La fin du sujet présente différents aspects de l'asservissement en position du simulateur. Il s'agit plus ici de questions de compréhension que de longs calculs.

Les deux sujets sont équilibrés en longueur et en durée compte tenu du temps nécessaire pour s'approprier la partie mécanique. La partie sciences physiques, bien qu'étiquetée électromagnétisme, reprend beaucoup de résultats de physique quantique et pouvait surprendre les candidats.

Indications

Partie I

1 Simplifier le laplacien du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ proposé par l'énoncé en utilisant les coordonnées cartésiennes.

3 La densité volumique d'énergie électrique est proportionnelle au carré de la norme du champ électrique.

4 Les équations étant analogues, déduire le résultat sur μ des propriétés de N, rappelées dans l'énoncé. De même, le mode fondamental du champ électrique $\mathrm{E}_0(x, y)$ est analogue à celui de la fonction d'onde $\psi_0(x, y)$.

5 Pour que l'onde se propage, il faut que son nombre d'onde soit réel.

6 Utiliser la définition de μ et sa positivité pour obtenir la propriété sur la vitesse de phase. Pour exprimer la vitesse de groupe, négliger q_0 devant $1/a$, comme l'indique l'énoncé.

7 Calculer le gradient et comparer chacun de ses termes avec ${q_0}^2$, sachant que $r < \mathrm{R} \ll a$ et $1/a \ll q_0$.

8 Utiliser l'équation de Maxwell-Faraday.

12 Développer $\mathrm{A}(z)$ et $\mathrm{S}(z)$ à l'ordre 1 en z et, à l'échelle de λ, négliger les variations de $\mathrm{A}(z)$.

13 Simplifier l'équation de Maxwell-Faraday en utilisant la forme de E proposée.

15 Réécrire l'équation (10) avec $\sigma_0(x)$ et $\sigma_1(x)$ et ne conserver que les termes de plus bas degrés en $\hbar$.

Partie II

17 Utiliser les schémas de la figure (5) dans le cas d'un roulis pur puis d'un lacet pur, sans tangage.

21 Le produit mixte est invariant par permutation circulaire de ses membres :

$$\left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} = \left(\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{b} = \left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}\right) \cdot \overrightarrow{a}$$

24 Le théorème de la valeur finale avec une entrée en échelon conduit au résultat.

25 Considérer que le dépassement du filtre complet vaut P_∞.

27 Dériver la position $h(t)$. On rappelle les définitions des fonctions hyperboliques :

$$\cosh a = \frac{\exp(a) + \exp(-a)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sinh a = \frac{\exp(a) - \exp(-a)}{2}$$

1. Propagation dans les milieux non homogènes

1 Pour établir l'équation scalaire de propagation de $\mathrm{E}(x,y)$, exprimons tout d'abord le laplacien du champ électrique :

$$\begin{aligned}\Delta\overrightarrow{\mathrm{E}} &= \frac{\partial^2\overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial z^2}\\ &= \left[\frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial x^2}\exp[\mathrm{j}(\kappa z-\omega t)]+\frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial y^2}\exp[\mathrm{j}(\kappa z-\omega t)]-\kappa^2\,\mathrm{E}\,\exp[\mathrm{j}(\kappa z-\omega t)]\right]\widehat{y}\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation vectorielle (6) devient, en éliminant le terme exponentiel,

$$\boxed{\frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial y^2}+\left[{n_0}^2{k_0}^2\left(1-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)-\kappa^2\right]\mathrm{E}=0}$$

Or, avec $\xi=(q_0/a)^{1/2}\,x$ et $\eta=(q_0/a)^{1/2}\,y$, on a

$$\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial x}=\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}=\left(\frac{q_0}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial\xi}\qquad\text{soit}\qquad\frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial x^2}=\frac{q_0}{a}\frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial\xi^2}$$

et de même $$\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial y}=\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\left(\frac{q_0}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial\eta}\qquad\text{soit}\qquad\frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial y^2}=\frac{q_0}{a}\frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial\eta^2}$$

Posons alors $q_0=n_0\,k_0$ et $\mu=({q_0}^2-\kappa^2)a/q_0$ pour obtenir successivement

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial y^2}+\left[{n_0}^2{k_0}^2\left(1-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)-\kappa^2\right]\mathrm{E}\\ &= \frac{q_0}{a}\frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial\xi^2}+\frac{q_0}{a}\frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial\eta^2}+\left[{q_0}^2\left(1-\frac{a}{q_0}\frac{\xi^2+\eta^2}{a^2}\right)-\kappa^2\right]\mathrm{E}\\ &= \frac{q_0}{a}\frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial\xi^2}+\frac{q_0}{a}\frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial\eta^2}+\left[{q_0}^2-\kappa^2-\frac{q_0}{a}(\xi^2+\eta^2)\right]\mathrm{E}\\ &= \frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial\eta^2}+\left[\frac{a}{q_0}({q_0}^2-\kappa^2)-(\xi^2+\eta^2)\right]\mathrm{E}\end{aligned}$$

et enfin $$\boxed{0=\frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial\eta^2}+\left[\mu-(\xi^2+\eta^2)\right]\mathrm{E}}$$

2 La constante de Planck réduite $\hbar$ a la dimension d'une énergie multipliée par un temps, comme l'indique la relation

$$\mathcal{E}=h\,\nu=\hbar\,\omega$$

On retrouve la dimension de l'énergie avec la relation qui donne l'énergie cinétique :

$$[\mathcal{E}]=[mv^2/2]=\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^2\cdot\mathrm{T}^{-2}$$

Par conséquent, $$\left[\sqrt{\frac{m\,\omega}{\hbar}}\right]=\left(\frac{\mathrm{M}\cdot\mathrm{T}^{-1}}{\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^2\cdot\mathrm{T}^{-1}}\right)^{1/2}=\mathrm{L}^{-1}$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{m\,\omega}{\hbar}}\ \text{a la dimension de l'inverse d'une longueur.}}$$

> Remarquons que $\sqrt{q_0/a}$ a également la dimension de l'inverse d'une longueur. Les variables réduites (ξ,η) et (u,v) sont ainsi effectivement adimensionnées.

Réécrivons l'équation de Schrödinger stationnaire d'un oscillateur harmonique en utilisant les variables réduites proposées :

$$\mathrm{E_N}\,\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + \left[\frac{1}{2}m\omega^2\big(x^2+y^2\big)\right]\psi$$

d'où
$$(\mathrm{N}+1)\,\hbar\omega\,\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + \left[\frac{1}{2}m\omega^2\big(x^2+y^2\big)\right]\psi$$

Rassemblons tous les termes dans le membre de droite :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + \left[(\mathrm{N}+1)\hbar\omega - \frac{1}{2}m\omega^2\big(x^2+y^2\big)\right]\psi \\
&= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) + \frac{\hbar\omega}{2}\left[2(\mathrm{N}+1) - \frac{m\omega}{\hbar}\big(x^2+y^2\big)\right]\psi \\
&= \frac{\hbar\omega}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right) + \frac{\hbar\omega}{2}\left[2(\mathrm{N}+1) - (u^2+v^2)\right]\psi
\end{aligned}$$

$$\boxed{0 = \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + \left[2(\mathrm{N}+1) - (u^2+v^2)\right]\psi}$$

On retrouve une équation analogue à celle obtenue à la question 1.

$\boxed{3}$ La condition de normalisation du champ électrique traduit la constance de la densité linéique d'énergie électrique sur une section de fibre perpendiculaire à la direction de propagation. En effet, la densité volumique d'énergie électrique est proportionnelle au carré de la norme du champ électrique. La relation de normalisation correspond à l'intégration de cette densité volumique sur une section droite de la fibre. **La normalisation traduit une énergie électrique finie.** Le champ électrique s'exprime en $\mathrm{V\cdot m^{-1}}$ donc **V s'exprime en volt.**

$\boxed{4}$ Puisque l'équation portant sur la fonction d'onde $\psi(x,y)$ est analogue à celle qui porte sur l'amplitude $\mathrm{E}(x,y)$, ses résultats lui sont transposables, à condition de remplacer μ par $2(\mathrm{N}+1)$. Or,$\mathrm{N}\geqslant 0$ implique

$$2(\mathrm{N}+1)\geqslant 2$$

donc
$$\boxed{\mu\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}}$$

Le mode fondamental de propagation correspond ainsi à $\mu=2$. En procédant par analogie en remplaçant $m\omega/\hbar$ par q_0/a dans la fonction d'onde ψ_0, on obtient, à une constante multiplicative C près,

$$\mathrm{E}_0(x,y) = \mathrm{C}\ \exp\left[-\frac{q_0}{2a}\big(x^2+y^2\big)\right]$$

Le mode de propagation fondamental est bien gaussien.

$\boxed{5}$ Pour que la propagation soit possible, il faut que la constante de propagation κ soit réelle non nulle donc que $\kappa^2>0$, ce qui impose

$${q_0}^2 - \mu\,\frac{q_0}{a} > 0$$

donc
$$q_0 = n_0\,\frac{\omega}{c} > \frac{\mu}{a}$$

et
$$\boxed{\omega > \omega_\mathrm{c} = \frac{\mu\,c}{a\,n_0}}$$

Cette relation conduit à l'inégalité suivante