Mines Physique 2 PC 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Henri Lastakowski (ENS Lyon) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet porte sur l'étude des mouvements verticaux de masses d'air dans la partie basse de l'atmosphère et sur l'impact du relief sur ces mouvements.

- Dans la première partie, on décrit l'évolution d'une particule de fluide constituée d'air. En combinant des approches thermodynamique et mécanique, on établit que les particules de fluide, soumises à leur poids et à la poussée d'Archimède, peuvent osciller verticalement autour d'une altitude d'équilibre.
- À partir des équations de la mécanique des fluides, la deuxième partie établit la relation de dispersion des ondes internes, dont la propagation repose sur le mécanisme d'oscillations étudié dans la première partie. Pour ce faire, on réalise un développement perturbatif des équations de la dynamique, au premier ordre.
- Dans la troisième partie, on interprète les résultats de simulations numériques de telles ondes dans une vallée encaissée en s'appuyant notamment sur la relation de dispersion établie dans la partie précédente. S'ensuit une analyse qualitative de différents phénomènes nuageux liés aux mouvements verticaux des masses d'air.

Cette épreuve est globalement difficile : certaines questions sont calculatoires et la physique de l'ascension des particules d'air y est à peine expliquée. Dès lors, il est facile de se perdre dans des expressions mathématiques, parfois lourdes, sans pouvoir réellement en dégager le sens physique. La troisième partie est redoutable : bien que les calculs soient sans difficulté, l'interprétation des documents fournis nécessite un peu d'habitude et beaucoup de jugeote.

Indications

Partie I

2 Utiliser l'expression de la température obtenue à la question précédente.

3 Exprimer ρ en fonction de z grâce à l'expression de $p(z)$. Montrer que

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\chi} = \left(\frac{\rho}{\rho(0)}\right)^{1/(\chi-1)}$$

4 Exprimer la masse d'une coquille sphérique de troposphère, de rayon $\mathrm{R_t} + z$. Remarquer que $\mathrm{R_t} \ll z$.

5 Linéariser χ_S.

6 Développer l'expression de la poussée d'Archimède à l'ordre 1 en ξ.

8 Il faut réexprimer χ_S (pour l'air de la bulle d'air) en fonction de $\rho_\mathscr{B}$. Effectuer alors un changement de variables $\rho_\mathscr{B}(z) = \rho_\mathscr{B}(p, \mathrm{S})$. Remarquer que l'évolution de l'air dans la bulle est supposé adiabatique réversible.

Partie II

10 Remarquer que $|\rho_0| \gg |\varepsilon \rho_1|$.

12 Calculer la divergence de l'équation obtenue à la question 11. Permuter l'opérateur divergence et la dérivée partielle par rapport au temps.

13 Projeter l'équation obtenue à la question 11 sur la verticale et en calculer le laplacien. Permuter les dérivées partielles par rapport à l'espace avec celle par rapport au temps.

15 Constater que ${k_z}^2 \geqslant 0$ car k_z est réel par hypothèse.

Partie III

20 Il faut se placer à t fixé pour déterminer la période spatiale selon Ox. De la même manière, il faut se placer à x fixé pour déterminer la période temporelle. On constate alors graphiquement que c_x est égal à la pente r_x.

21 Exprimer les nombres d'onde k_x, k_y et k_z en fonction de r_x, r_y et r_z.

24 Que se passe-t-il si l'atmosphère stratifiée n'est pas le siège d'oscillations verticales des particules d'air ?

25 Quelle est la conséquence de l'élévation de particules d'air humide ?

Ondes internes en vallée encaissée

I. Atmosphère stablement stratifiée

1 Intégrons la relation fournie :

$$\mathrm{T}(z) = -\mathrm{C}\,z + \mathrm{T}(0)$$

d'où

lieu	T (K)	t (°C)
Chamonix	281,9	8,7
Mont-Blanc	259,3	−13,9

> La conversion K→°C est effectuée en retranchant 273,15 à la valeur obtenue en kelvins.

2 La relation de l'hydrostatique projetée sur la verticale ascendante s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho\,g$$

Or, d'après la loi des gaz parfaits, $\quad p = \dfrac{\rho\,\mathrm{RT}}{\mathrm{M}}$

donc
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\frac{g\mathrm{M}}{\mathrm{RT}}\,p = -\frac{g\mathrm{M}}{\mathrm{RC}}\,\frac{p}{\mathrm{T}(0)/\mathrm{C} - z}$$

où l'on a utilisé l'expression de la température établie à la question précédente. On reconnaît une équation différentielle du premier ordre en p. Après intégration, il vient

$$p(z) = p(0)\,\exp\left[-\int_0^z \frac{\chi}{\mathrm{T}(0)/\mathrm{C} - z'}\,\mathrm{d}z'\right] = p(0)\,\exp\left[\chi\,\ln\left(1 - \frac{\mathrm{C}\,z}{\mathrm{T}(0)}\right)\right]$$

ou encore
$$\boxed{p(z) = p_0\left[1 - \frac{\mathrm{C}\,z}{\mathrm{T}(0)}\right]^{\chi}} \qquad (\text{avec } p(0) = p_0)$$

Numériquement,

lieu	p (hPa)
Chamonix	893
Mont-Blanc	555

3 D'après la loi des gaz parfaits,

$$\rho(z) = \frac{\mathrm{M}\,p(z)}{\mathrm{R}\,\mathrm{T}(z)} = \frac{\mathrm{M}\,p_0}{\mathrm{R}\,\mathrm{T}(0)}\,\frac{[1 - \mathrm{C}\,z/\mathrm{T}(0)]^{\chi}}{1 - \mathrm{C}\,z/\mathrm{T}(0)}$$

Remarquons que
$$\rho(0) = \frac{\mathrm{M}\,p_0}{\mathrm{R}\,\mathrm{T}(0)}$$

Ainsi
$$\rho(z) = \rho(0)\left[1 - \frac{\mathrm{C}\,z}{\mathrm{T}(0)}\right]^{\chi-1}$$

Le résultat de la question 2 montre que

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\chi} = 1 - \frac{\mathrm{C}\,z}{\mathrm{T}(0)} = \left(\frac{\rho}{\rho(0)}\right)^{1/(\chi-1)}$$

ce qui prouve que
$$\boxed{p\,\rho^{-\alpha} = \mathrm{C^{te}} \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{\chi}{\chi - 1} = 1{,}2}$$

La valeur de γ dépend de la température. Si on considère que dans les conditions de température considérées, $\gamma = 7/5 = 1{,}4$, on a bien

$$\boxed{1 \leqslant \alpha \leqslant \gamma}$$

4 Considérons une coquille sphérique, de rayon $\mathrm{R_t} + z$, d'épaisseur $\mathrm{d}z$ découpée dans la troposphère. La masse $\mathrm{d}m_{\mathrm{tr}}$ de cette coquille est

$$\mathrm{d}m_{\mathrm{tr}} = 4\pi\,(\mathrm{R_t} + z)^2\,\rho(z)\,\mathrm{d}z$$

Intégrons sur z compris entre 0 et z_{tr} :

$$\boxed{m_{\mathrm{tr}} = 4\pi \int_0^{z_{\mathrm{tr}}} (\mathrm{R_t} + z)^2\,\rho(z)\,\mathrm{d}z}$$

où $\rho(z)$ est une fonction de z (d'après la question 3). Pour estimer cette intégrale, notons que pour tout z dans $[\,0\,;12\text{ km}\,]$, $\mathrm{R_t} \gg z$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{tr}} &\simeq 4\pi \int_0^{z_{\mathrm{tr}}} {\mathrm{R_t}}^2\,\rho(z)\,\mathrm{d}z \\ &\simeq 4\pi\,{\mathrm{R_t}}^2 \rho(0) \int_0^{z_{\mathrm{tr}}} \left[1 - \frac{\mathrm{C}\,z}{\mathrm{T}(0)}\right]^{\chi-1} \mathrm{d}z \end{aligned}$$

d'où

$$m_{\mathrm{tr}} \simeq \frac{4\pi\,{\mathrm{R_t}}^2 \rho(0)\,\mathrm{T}(0)}{\mathrm{C}\,\chi} \left[-\left(1 - \frac{\mathrm{C}\,z}{\mathrm{T}(0)}\right)^{\chi}\right]_{z=0}^{z_{\mathrm{tr}}}$$

Remplaçons χ dans la fraction, par son expression introduite à la question 2,

$$\boxed{m_{\mathrm{tr}} \simeq \frac{4\pi\,{\mathrm{R_t}}^2\,p_0}{g} \left[1 - \left(1 - \frac{\mathrm{C}\,z_{\mathrm{tr}}}{\mathrm{T}(0)}\right)^{\chi}\right] = 4{,}3.10^{18}\text{ kg}}$$

5 Linéarisons l'expression de χ_{S} en remplaçant la dérivée par le taux de variation :

$$\delta\mathrm{V} = -\chi_{\mathrm{S}} \mathrm{V}_0\,\delta p$$

D'après la loi de l'hydrostatique (elle aussi linéarisée), on a

$$\frac{\delta p}{\xi} = -\rho_0\,g$$

donc

$$\boxed{\delta\mathrm{V} = \chi_{\mathrm{S}} \mathrm{V}_0\,\rho_0 g\,\xi}$$

> On utilise la compressibilité isentropique car on suppose que les mouvements des masses d'air sont rapides devant les durées caractéristiques des échanges thermiques entre la bulle d'air et l'air qui l'entoure. C'est pour cette raison que l'évolution est supposée adiabatique. Comme en sus, elle est réversible (absence d'amortissement ou de dissipation), elle est isentropique.

6 Par définition, la poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi}$, à l'altitude $z_0 + \xi$, est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé par la bulle, de volume $\mathrm{V}_0 + \delta\mathrm{V}$ à cette altitude, d'où

$$\overrightarrow{\Pi} = \rho(z_0 + \xi)\,(\mathrm{V}_0 + \delta\mathrm{V})\,g\,\overrightarrow{u_z}$$