E3A Physique et Chimie PSI 2011 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (ENS Cachan) et Tiphaine Weber (Enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Élodie Bonnaud-Morin (Professeur agrégé), Olivier Frantz (Professeur agrégé en école d'ingénieur), Mickaël Profeta (Professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce problème, constitué de quatre parties indépendantes, porte sur l'étude d'un générateur à turbine à gaz.

- Dans la première partie, proche du cours, on étudie le cycle moteur de Carnot dans le diagramme de Watt puis dans le diagramme entropique.
- Le cycle thermodynamique de Brayton est au cœur de la deuxième partie. Après avoir obtenu une écriture adaptée du premier principe, on étudie ce cycle, d'abord dans un cas idéal, puis en prenant en compte le caractère irréversible de certains phénomènes. On termine en regardant les conséquences de l'ajout d'un régénérateur.
- Dans la troisième partie, on s'intéresse à la production d'électricité par une turbine alimentée par le cycle moteur de Brayton. On y retrouve des raisonnements classiques d'induction.
- La quatrième partie, divisée en deux sous-parties indépendantes, s'intéresse d'un point de vue chimique à la combustion du méthane dans la chambre de combustion. La première sous-partie étudie tout d'abord l'équilibre chimique associé à cette réaction ainsi que ses déplacements. Elle se poursuit avec le calcul des quantités de chaleur fournies par les réactions de combustion. La deuxième sous-partie, la plus longue, s'attache quant à elle à la construction et l'exploitation du diagramme d'Ostwald associé à cette combustion. Les calculs demandés sont assez simples mais une attention particulière doit être apportée à l'explication du sens physique des courbes tracées. Le rapport du jury précise d'ailleurs que le but de cette partie était d'évaluer « l'ingéniosité du candidat, son niveau d'acuité de raisonnement face à une problématique différente, son sens pratique voire critique quant à la technique utilisée. »

D'une longueur et d'une difficulté raisonnables, ce sujet est une bonne occasion de réviser la thermodynamique et l'induction. Très peu de résultats intermédiaires sont donnés, ce qui impose de soigner les premières questions. Notons également que de nombreuses applications numériques sont demandées par l'énoncé.

Conseils du jury

Le rapport du jury rappelle que « traiter un problème de Physique-Chimie, c'est exposer la solution de façon claire et concise » et regrette « l'absence de rédaction observée dans un grand nombre de copies, alors qu'un ingénieur, dans sa vie professionnelle, passe beaucoup plus de temps à expliquer et à communiquer qu'à développer des équations ». Il souligne enfin que « le concours à mis en place un système de bonus récompensant par un nombre significatif de points une rédaction soignée, mais aussi les parties de problèmes traitées de façon complète et ponctuées de remarques physiques pertinentes afin de lutter contre les stratégies de grappillage de points adoptées par bon nombre de candidats. »

Indications

Partie I

A.1 Exprimer les différentes fonctions $P = f(V)$ pour les deux transformations et calculer la pente en dérivant cette fonction par rapport à sa variable V.

A.3 Penser à l'inégalité de Clausius.

B.1 Décomposer l'entropie totale et utiliser les hypothèses de l'énoncé.

Partie II

C.3 Reprendre la démonstration de la détente de Joule-Kelvin.

D.1 Écrire la deuxième identité thermodynamique faisant intervenir l'enthalpie.

D.2 Utiliser la question C.3.

D.4 Faire attention au signe.

D.5 La turbine reçoit w_T mais fournit w_c.

D.7 Quelle est la grandeur valorisée et quelle est la grandeur coûteuse ?

E.1 Écrire η_c en fonction des températures puis isoler $T_{2'}$ dans l'expression de η_c.

F.3 Comprendre que le régénérateur diminue la quantité de combustible nécessaire.

Partie III

G.1 Penser à la loi de Faraday.

G.2 Attention aux unités.

G.4 Donner le lien entre la puissance, la tension efficace, l'intensité efficace et le facteur de puissance.

G.6 Passer en notation complexe et écrire la formule du diviseur de tension.

H.2 Utiliser la question H.1 pour l'eau et le gaz.

Partie IV

I.2 Exprimer Q en fonction de P, puis dQ pour une variation de pression dP, toutes les autres variables restant constantes. Comparer Q et K.

I.3 Exprimer de même Q en fonction de n_{gaz}.

I.5 $1\ \text{Wh} = 3,6\ \text{kJ}$.

I.8 Seule l'oxydation du carbone n'est pas complète. Elle conduit à la formation de monoxyde de carbone.

J.1 Σ est la quantité de matière en phase sèche par mole de combustible introduit, c'est-à-dire $\dfrac{n_{\text{sec}}}{n_0}$.

J.4 Dans quelles conditions peut-on avoir [CO] et [CO_2] nulles ? De même, que veut dire pour la combustion $[CO] = [O_2] = 0$?

J.7 Que vaut e pour $\lambda = 1$?

I. Cycle de Carnot

A. Diagramme de Watt

A.1 Pour comparer les pentes des tangentes aux courbes, on doit calculer la dérivée de P par rapport à V dans chacune des transformations en un même point (P, V).

- Pour une isotherme, $\mathrm{PV} = n\mathrm{RT} = \mathrm{C^{te}}_1$ donc la pente vaut

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{V}} = -\frac{n\mathrm{RT}}{\mathrm{V}^2} = -\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{V}}$$

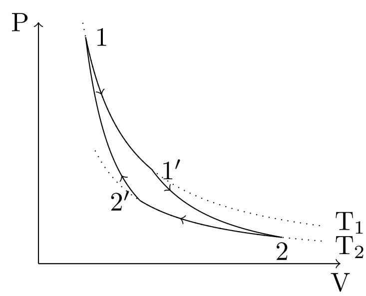
- Pour une adiabatique réversible, utilisons l'équation de Laplace $\mathrm{PV}^\gamma = \mathrm{C^{te}}_2$,

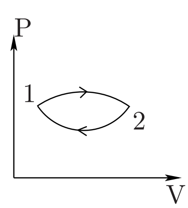
$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{V}} = -\frac{\gamma\,\mathrm{C^{te}}_2}{\mathrm{V}^{\gamma+1}} = -\gamma\,\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{V}}$$

Ainsi, $\boxed{\text{Le rapport des deux pentes vaut } \gamma.}$

Or, $\gamma > 1$ donc **une adiabatique réversible est plus pentue qu'une isotherme**.

A.2 Le cycle de Carnot est représenté dans le diagramme de Watt ci-contre. Les traits en pointillés sont des isothermes et les traits pleins les transformations du cycle. L'aire du cycle correspond à $-\mathrm{W}$ où W est **le travail reçu par le fluide sur un cycle**.





Considérons un cycle simplifié, à deux transformations. Le travail entre 1 et 2 s'écrit

$$\mathrm{W}_{12} = -\int_1^2 \mathrm{P}\,\mathrm{dV}$$

Or une petite aire dA vaut P(V) dV donc le travail $1 \to 2$ correspond à l'aire sous la courbe $1 \to 2$. Par conséquent, dans le cas choisi, le travail est négatif ($\mathrm{V}_2 > \mathrm{V}_1$). Or, il y a deux aires à prendre en compte ici : celle en dessous des courbes $1 \to 2$ et $2 \to 1$. Ces deux aires ne sont pas égales car le travail dépend du chemin suivi. Dans ce cas, le travail W_{12} est bien l'opposé de l'aire sous la courbe $1 \to 2$ et celui W_{21} est en revanche égal à l'aire sous celle $2 \to 1$. Ainsi, le travail total W vaut

$$\mathrm{W} = \mathrm{W}_{12} + \mathrm{W}_{21} = -\mathrm{A}_{12} + \mathrm{A}_{21} = -\mathrm{A}_{\text{tot}}$$

Le travail est donc égal à l'aire du cycle.

A.3 Dans le cas général, le rendement η est défini comme

$$\eta = \left|\frac{\text{ce qui intéresse}}{\text{ce qui coûte}}\right|$$

Un moteur a pour but de créer du travail (ici $\mathrm{W} < 0$). Pour cela, on lui fournit un transfert thermique (ici $\mathrm{Q}_1 > 0$). Le rendement s'écrit donc ici

$$\eta = -\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Q}_1}$$

Écrivons le premier principe sur le cycle,

$$\Delta\mathrm{U} = 0 = \mathrm{W} + \mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2$$

Remplaçons cette égalité dans l'expression du rendement

$$\eta = 1 + \frac{\mathrm{Q}_2}{\mathrm{Q}_1}$$

D'après l'inégalité de Clausius, qui est dans ce cas une égalité car le cycle de Carnot est composé de transformations réversibles,

$$\frac{\mathrm{Q}_1}{\mathrm{T}_1} + \frac{\mathrm{Q}_2}{\mathrm{T}_2} = 0$$

soit

$$\frac{\mathrm{Q}_2}{\mathrm{Q}_1} = -\frac{\mathrm{T}_2}{\mathrm{T}_1}$$

d'où

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{\mathrm{T}_2}{\mathrm{T}_1} = 0{,}77}$$

Pour avoir le rendement le plus élevé, il faut des températures T_1 et T_2 les plus éloignées possibles.

> Rappelons la démonstration de l'inégalité de Clausius pour une machine M en contact avec N thermostats (de température constante),
>
> $$\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{Q}_i}{\mathrm{T}_i} \leqslant 0$$
>
> Comme S est une fonction d'état alors $\Delta\mathrm{S} = 0$ sur un cycle. Or la variation d'entropie totale de M s'écrit
>
> $$\Delta\mathrm{S} = \mathrm{S}_{\text{créée}} + \mathrm{S}_{\text{éch}} = 0$$
>
> Le second principe stipule que $\mathrm{S}_{\text{créée}} \geqslant 0$. Ainsi pour équilibrer la valeur nulle de l'entropie totale, l'entropie échangée doit être inférieure ou égale à 0.

A.4 La nature du fluide décrivant le cycle de Carnot n'est intervenue à aucun moment. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Le rendement est indépendant de la nature du fluide.}}$$

Pour un moteur réel, les transformations ne sont plus réversibles donc l'entropie créée n'est pas nulle. Écrivons alors l'inégalité de Clausius,

$$\frac{\mathrm{Q}_2}{\mathrm{T}_2} + \frac{\mathrm{Q}_1}{\mathrm{T}_1} < 0$$