Mines Physique 2 PSI 2009 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Mehdi Nehmé (ENS Cachan) ; il a été relu par Emmanuel Bourgeois (Professeur en CPGE) et Emmanuel Loyer (Professeur en CPGE).

Le problème concerne l'impédance des bobines à air, plus particulièrement les écarts au modèle de bobine idéale d'impédance imaginaire pure. Il s'attache à montrer que l'impédance d'une bobine réelle comporte une partie réelle quadratique en fréquence, du moins dans un domaine limité de basses fréquences. Il se compose de deux parties largement indépendantes.

- La première partie commence par l'étude (théorique puis expérimentale) d'un montage à amplificateur opérationnel et de ses points de fonctionnement (existence, stabilité). Ce montage est ensuite utilisé comme élément actif dans la réalisation d'un oscillateur permettant d'accéder expérimentalement à la dépendance fréquentielle de la partie réelle de l'impédance d'une bobine à air. On retrouve alors certaines propriétés des oscillations observées à l'aide d'un modèle simple de bobine réelle. Cette partie repose principalement sur les connaissances d'électronique acquises en première année.
- La seconde partie, plus courte mais aussi plus technique, exploite les connaissances de deuxième année en électromagnétisme. Dans le cadre de l'ARQS, on étudie l'effet de peau dans un fil cylindrique conducteur qui tient lieu de bobine à air. On retrouve ainsi la dépendance fréquentielle introduite dans la partie I. Parfois calculatoire, cette partie reste abordable car certains résultats sont donnés dans l'énoncé et permettent de contrôler sa progression.

D'une difficulté graduelle, ce problème est conçu pour classer efficacement les candidats.

Indications

Première partie

2 Le problème est non-linéaire. Pour le résoudre, faire une hypothèse sur V_s et vérifier son domaine de validité a posteriori.

3 Penser aux problèmes de masses électriques.

4 On dispose de deux relations reliant V_e à I_e : penser à une discussion graphique.

6 Passer de la description fréquentielle à la description temporelle afin d'obtenir une équation différentielle : une multiplication par $j\omega$ revient à dériver une fois par rapport au temps.

11 Pour accéder à r_0, il suffit de faire circuler un courant continu dans la bobine et de mesurer la tension à ses bornes. Sur quel composant peut-on agir pour faire varier la fréquence des oscillations ?

14 Une fois l'équation différentielle obtenue, la mettre sous forme canonique afin d'obtenir les caractéristiques de l'oscillateur.

19 Revenir à la mise en équation initiale, c'est-à-dire à l'écriture de la loi des mailles (question 8). La modifier pour prendre en compte les non-linéarités.

Seconde partie

22 Écrire les équations de Maxwell dans le cadre de l'ARQS, puis les particulariser pour un conducteur. Ne pas oublier d'utiliser le formulaire d'analyse vectorielle fourni par l'énoncé.

24 Prudence lors du passage au champ électrique réel, car $e^{j\omega t}$ possède une partie imaginaire non nulle.

25 Calculer le flux du vecteur densité de courant à travers une section droite du fil. Dans l'intégrale, faire le changement de variable $\lambda_r = r/\delta$. Après avoir élevé au carré, écrire directement les valeurs moyennes de produits de fonctions sinusoïdales : $\langle \cos^2 \omega t\rangle = \langle \sin^2 \omega t\rangle = 1/2$ et $\langle \sin\omega t \, \cos\omega t\rangle = 0$.

26 Intégrer l'équation de Maxwell-Ampère en utilisant le fait que le champ magnétique est supposé borné sur l'axe. Ici aussi, prudence lors du passage au champ magnétique réel.

28 Penser à l'effet Joule et à l'expression de la puissance moyenne dissipée dans un résistor en régime périodique.

29 Calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting, soit à partir des grandeurs complexes en utilisant la formule

$$\langle \overrightarrow{\Pi}(r,t)\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\overrightarrow{\mathrm{E}}}(r,t)\wedge \underline{\overrightarrow{\mathrm{B}}}^*(r,t)}{\mu_0}\right)$$

soit à partir des champs réels en développant

$$\overrightarrow{\Pi}(r,t) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{E}}(r,t)\wedge \overrightarrow{\mathrm{B}}(r,t)}{\mu_0}$$

puis en prenant la valeur moyenne.

I. Étude d'un circuit à amplificateur opérationnel

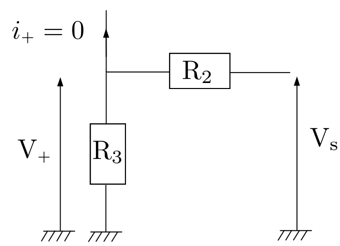
I.A Étude d'un dipôle

1 L'AO est idéal donc $i_- = 0$. La tension aux bornes de la résistance R_1 s'écrit, d'après la loi d'Ohm

$$V_s - V_e = -R_1\, I_e$$

Pour la même raison, $i_+ = 0$. On reconnaît alors un pont diviseur de tension sur la figure ci-contre, et

$$V_+ = \frac{R_3}{R_2 + R_3}\, V_s$$



L'AO idéal fonctionnant en régime linéaire

$$V_+ = V_- = V_e$$

On élimine V_s dans les relations précédentes :

$$\left[\left(\frac{R_2 + R_3}{R_3}\right) - 1\right] V_e = -R_1\, I_e$$

Finalement,

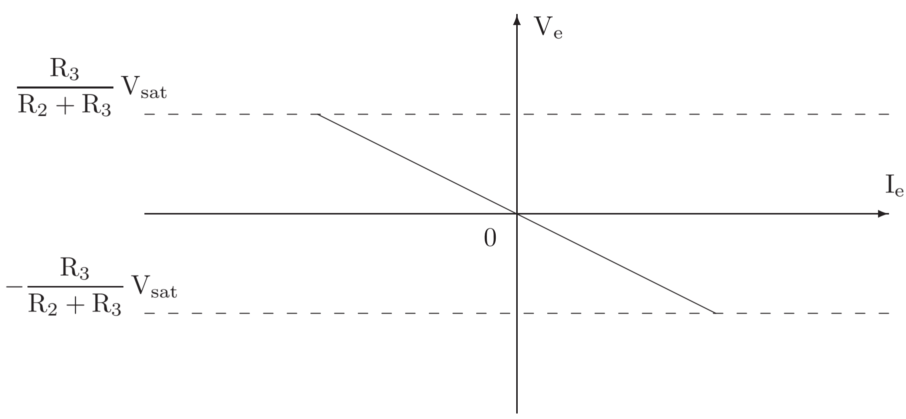
$$\boxed{Z_e = \frac{V_e}{I_e} = -\frac{R_1 R_3}{R_2}}$$

> Le fait que l'impédance trouvée soit négative ne doit pas surprendre : dans une portion de sa caractéristique, le dipôle vu depuis son entrée est équivalent à une résistance négative. Cela n'a rien de choquant du fait de la présence d'un élément actif, l'AO.

Le calcul précédent est valable tant que l'AO fonctionne en régime linéaire, c'est-à-dire si $|V_s| < V_{sat}$, ce qui donne les limites du domaine de validité :

$$\boxed{|V_e| < \frac{R_3}{R_2 + R_3}\, V_{sat}}$$

Traçons la partie de la caractéristique qui décrit le régime linéaire.



2 Le fonctionnement non-linéaire regroupe les cas de saturation positive et négative de la tension de sortie.

- Si $\mathrm{V_s} = +\mathrm{V_{sat}}$, la loi d'Ohm aux bornes de $\mathrm{R_1}$ donne

$$\boxed{\mathrm{V_e} = \mathrm{R_1\,I_e} + \mathrm{V_{sat}}}$$

C'est le cas pour $\mathrm{V_+} > \mathrm{V_-}$, soit

$$\boxed{\mathrm{V_e} < \frac{\mathrm{R_3}}{\mathrm{R_2}+\mathrm{R_3}}\,\mathrm{V_{sat}}}$$

- Si $\mathrm{V_s} = -\mathrm{V_{sat}}$, la loi d'Ohm aux bornes de $\mathrm{R_1}$ donne

$$\boxed{\mathrm{V_e} = \mathrm{R_1\,I_e} - \mathrm{V_{sat}}}$$

C'est le cas pour $\mathrm{V_+} < \mathrm{V_-}$, soit

$$\boxed{\mathrm{V_e} > -\frac{\mathrm{R_3}}{\mathrm{R_2}+\mathrm{R_3}}\,\mathrm{V_{sat}}}$$

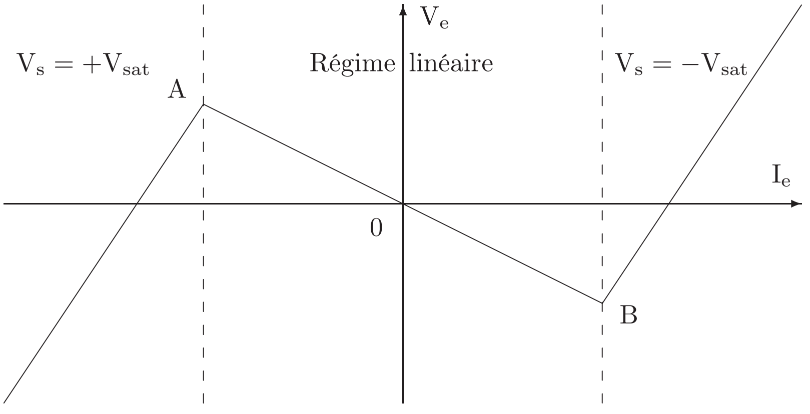
La caractéristique est donc affine par morceaux. Définissons les points A et B comme les points où se produisent des changements de pente.

$$\begin{cases} \mathrm{V_e(A)} = \dfrac{\mathrm{R_3}}{\mathrm{R_2}+\mathrm{R_3}}\,\mathrm{V_{sat}} \\ \mathrm{V_e(B)} = -\dfrac{\mathrm{R_3}}{\mathrm{R_2}+\mathrm{R_3}}\,\mathrm{V_{sat}} \end{cases}$$

En reportant dans l'équation $\mathrm{V_e} = f(\mathrm{I_e})$ donnant la forme de la caractéristique, on trouve les intensités des courants associés, soit

$$\begin{cases} \mathrm{I_e(A)} = -\dfrac{\mathrm{R_2}}{\mathrm{R_1}(\mathrm{R_2}+\mathrm{R_3})}\,\mathrm{V_{sat}} \\ \mathrm{I_e(B)} = \dfrac{\mathrm{R_2}}{\mathrm{R_1}(\mathrm{R_2}+\mathrm{R_3})}\,\mathrm{V_{sat}} \end{cases}$$

On peut maintenant tracer la totalité de la caractéristique $\mathrm{V_e} = f(\mathrm{I_e})$ du dipôle à résistance négative.



> On remarque que cette caractéristique est symétrique par rapport à l'origine. Ainsi, le sens de branchement du dipôle est sans importance.