X Maths 2 MP 2009 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (Professeur agrégé) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Ce sujet est loin d'être le plus passionnant de l'année 2009. Il consiste à étudier les éléments propres d'un endomorphisme opérant sur un espace de dimension infinie ainsi que ceux de certains endomorphismes induits sur des sous-espaces stables.

- La première partie porte sur l'algèbre linéaire. L'objectif est simplement de trouver une base de diagonalisation ou de trigonalisation d'une matrice carrée d'ordre 2. Elle est tout à fait abordable mais il y faut distinguer quatre cas. Cette distinction doit être refaite quasi systématiquement dans toute la suite.
- Dans la seconde partie, on définit un endomorphisme sur les suites complexes indexées par $\mathbb{Z}$, puis on s'attaque à la recherche des éléments propres de ce dernier. Il n'y a pas de réelle difficulté, à l'exception de la dernière question.
- La troisième partie introduit deux sous-espaces stables de l'endomorphisme de la partie précédente. On reprend alors la recherche d'éléments propres, cette fois pour les endomophismes induits.
- Enfin la dernière partie, indépendante des précédentes, fait une brève incursion dans les séries de Fourier. On y redémontre un résultat de la partie précédente à l'aide d'une technique complètement différente.

D'un point de vue mathématique, la démarche n'a que très peu d'intérêt : les résultats obtenus n'ont pas de réelle utilité et ne sont pas spécialement généralisables à une classe plus vaste d'endomorphismes. Seules quelques questions sont un peu techniques et constituent finalement les seuls moments agréables du sujet.

Pour conclure, ce problème est à conseiller principalement aux élèves souhaitant se préparer à l'X et s'exercer sur des questions rendues délicates par le nombre de cas à traiter.

Indications

1 Remarquer qu'il s'agit simplement de diagonaliser ou trigonaliser la matrice T_λ. Utiliser alors les techniques classiques de réduction.

2.a Etablir une relation de récurrence entre les vecteurs $\begin{pmatrix} x_p \\ x_{p+1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_{p-1} \\ x_p \end{pmatrix}$.

2.b Justifier que l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E}) \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ \qquad x \qquad\qquad \longmapsto (x_0, x_1) \end{cases}$$

3 Exprimer pour tout $k \in \mathbb{Z}$ le vecteur $\begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix}$ en fonction des vecteurs $f_{\lambda,1}$ et $f_{\lambda,2}$.

4 Remarquer qu'une suite périodique est nécessairement bornée et utiliser les résultats de la question 3.

5 Établir pour tout $(x, u) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_\infty$ l'inégalité $|\langle x \mid u \rangle| \leqslant \|x\|_1 \cdot \|u\|_\infty$.

7.a Pour l'égalité, raisonner par récurrence sur n. La preuve est très similaire à celle de la formule de Leibniz (dérivée n-ième d'un produit de fonction).

7.b Justifier que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda^{-n} {\mathrm{A}_1}^n x$ est absolument convergente dans E_1.

8.a Remarquer qu'un élément de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}_1 - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}_1})$ est un élément de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})$ borné et de limite nulle en $+\infty$.

8.b Même technique qu'à la question précédente en recherchant cette fois uniquement les éléments bornés de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})$.

9 Montrer que la quantité $\langle x \,|\, u \rangle$ est nulle pour tout élément x de $\mathrm{Im}\,(\mathrm{A}_1 - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}_1})$ et tout élément u de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}_\infty - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}_\infty})$.
Utiliser ensuite la continuité d'une application continue sur un ensemble dense pour prouver que $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}_\infty - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}_\infty})$ est réduit au singleton $\{0\}$.

10 Effectuer une interversion série-intégrale.

11 Utiliser successivement une séparation de somme, deux changements d'indices et enfin les formules d'Euler.

12 Calculer $\varphi_{\mathrm{B}_{\lambda,n} x}$ où $\mathrm{B}_{\lambda,n}$ est la n-ième somme partielle de la série définissant B_λ puis faire tendre n vers $+\infty$. On pourra utiliser la linéarité et la continuité de $x \longmapsto \varphi_x$.

13 Justifier que si x est un élément de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}_1 - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}_1})$, alors φ_x est la fonction nulle.

Première partie

> Dans tout le corrigé, T_λ désignera par abus de langage à la fois l'endomorphisme introduit par l'énoncé et sa matrice respectivement à la base canonique de $\mathbb{C}^2$. Cet abus est d'ailleurs implicitement réalisé par l'auteur de l'énoncé lorsqu'il écrit $\mathrm{T}_\lambda f_{\lambda,1}$ comme un produit au lieu de noter $\mathrm{T}_\lambda(f_{\lambda,1})$.

1 L'objectif de ces quatre premières questions est simplement d'exhiber une base de diagonalisation ou de trigonalisation de la matrice T_λ. Commençons donc par faire les préliminaires classiques pour ce genre de travail. Le polynôme caractéristique de T_λ est donné par

$$\chi_{\mathrm{T}_\lambda}(\mathrm{X}) = \det \begin{pmatrix} -\mathrm{X} & 1 \\ -1 & \lambda - \mathrm{X} \end{pmatrix} = \mathrm{X}^2 - \lambda \mathrm{X} + 1$$

Son discriminant vaut alors $\qquad \Delta = \lambda^2 - 4$

On peut ainsi distinguer les quatre cas suivants :

- Si $|\lambda| > 2$, alors $\chi_{\mathrm{T}_\lambda}$ a deux racines réelles distinctes, qui sont donc les deux valeurs propres de T_λ. Puisque $\det \mathrm{T}_\lambda = 1$, elles sont également inverses l'une de l'autre.
- Si $|\lambda| < 2$, $\chi_{\mathrm{T}_\lambda}$ a cette fois deux racines complexes conjuguées, qui sont les deux valeurs propres de T_λ. L'égalité $\det \mathrm{T}_\lambda = 1$ assure ici qu'elles sont de module 1.
- Enfin si $\lambda = 2$ (resp. si $\lambda = -2$), alors $\chi_{\mathrm{T}_\lambda}$ admet 1 (resp. -1) pour unique valeur propre. Comme cette matrice n'est pas égale à I_2 (resp. $-\mathrm{I}_2$), elle n'est pas diagonalisable.

Passons maintenant à ce que demande précisément l'énoncé.

1.a Le réel λ étant de valeur absolue strictement supérieure à 2, l'étude précédente montre que les deux racines du polynôme $\chi_{\mathrm{T}_\lambda}$ sont réelles et inverses l'une de l'autre. Une résolution rapide de l'équation du second degré $\chi_{\mathrm{T}_\lambda}(\mathrm{X}) = 0$ donne précisément les valeurs suivantes

$$\mu_\lambda = \lambda \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda^2}} \right) \qquad \text{et} \qquad {\mu_\lambda}^{-1} = \lambda \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda^2}} \right)$$

Pour trouver le premier vecteur $f_{\lambda,1}$, il suffit de déterminer le noyau de $\mathrm{T}_\lambda - \mu_\lambda \mathrm{I}_2$. Soit $\mathrm{X} = {}^t(\alpha, \beta)$ un élément de $\mathbb{C}^2$. En remarquant que $\lambda - \mu_\lambda = {\mu_\lambda}^{-1}$, il vient

$$(\mathrm{T}_\lambda - \mu_\lambda \mathrm{I}_2)\mathrm{X} = 0 \iff \begin{pmatrix} -\mu_\lambda & 1 \\ -1 & {\mu_\lambda}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \iff \beta = \alpha\, \mu_\lambda$$

Le vecteur $f_{\lambda,1} = {}^t(1, \mu_\lambda)$ est par conséquent un vecteur qui convient. De la même manière, on prouve que le vecteur $f_{\lambda,2} = {}^t(1, {\mu_\lambda}^{-1})$ est également un vecteur propre associé à la valeur propre ${\mu_\lambda}^{-1}$ et dont la composante suivant e_1 est égale à 1.

Ces deux vecteurs étant deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.

> Si $|\lambda| > 2$, en posant $\mu_\lambda = \lambda\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{\lambda^2}}\right)$ puis $f_{\lambda,1} = \begin{pmatrix}1\\ \mu_\lambda\end{pmatrix}$ et $f_{\lambda,2} = \begin{pmatrix}1\\ {\mu_\lambda}^{-1}\end{pmatrix}$, on a bien $|\mu_\lambda| > 1$ et les relations
> $$\mathrm{T}_\lambda f_{\lambda,1} = \mu_\lambda f_{\lambda,1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_\lambda f_{\lambda,2} = {\mu_\lambda}^{-1} f_{\lambda,2}$$

Les notations de la valeur μ_λ et de son inverse peuvent paraître curieuses. On serait plutôt tenté en effet de noter

$$\frac{1}{2}\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}\left(\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}\right)$$

les deux racines du polynôme caractéristique. Cette notation n'est cependant pas très pratique car, suivant le signe de λ, μ_λ correspondra tantôt à la quantité de gauche, tantôt à celle de droite. La notation précédente a le mérite de ne pas nécessiter cette distinction de cas.

1.b Cette fois, les racines du polynôme $\chi_{\mathrm{T}_\lambda}$ sont complexes conjuguées et de module 1. Précisément, on trouve dans ce cas

$$\mu_\lambda = \frac{1}{2}\left(\lambda+i\sqrt{4-\lambda^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \overline{\mu_\lambda} = \frac{1}{2}\left(\lambda-i\sqrt{4-\lambda^2}\right)$$

La recherche des vecteurs propres reste similaire et amène aux mêmes expressions de $f_{\lambda,1}$ et $f_{\lambda,2}$ en fonction de μ_λ et ${\mu_\lambda}^{-1} = \overline{\mu_\lambda}$. Ils forment une base de $\mathbb{R}^2$ pour les mêmes raisons qu'à la question 1.a.

> Si $|\lambda| < 2$, il suffit de poser $\mu_\lambda = \left(\lambda+i\sqrt{4-\lambda^2}\right)/2$ et de conserver les expressions de $f_{\lambda,1}$ et $f_{\lambda,2}$ de la question 1.a pour satisfaire les conditions de l'énoncé.

1.c Si $\lambda = 2$, le réel 1 est la seule valeur propre de T_2 et les expressions précédente donnent $f_{2,1} = {}^t(1,1)$ comme vecteur propre associé. Pour trouver le vecteur $f_{2,2}$, considérons un réel α quelconque et posons $f_{2,2} = {}^t(1,\alpha)$. On constate que

$$\mathrm{T}_2 f_{2,2} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ 2\alpha-1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad f_{2,1}+f_{2,2} = \begin{pmatrix}2\\ 1+\alpha\end{pmatrix}$$

La condition $\mathrm{T}_2 f_{2,2} = f_{2,1}+f_{2,2}$ est alors satisfaite si et seulement si on a $\alpha = 2$. Les deux vecteurs $f_{2,1}$ et $f_{2,2}$ ainsi choisis n'étant pas colinéaires, ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.

> Les vecteurs $f_{2,1} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ et $f_{2,2} = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ satisfont les conditions
> $$\mathrm{T}_2 f_{2,1} = f_{2,1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_2 f_{2,2} = f_{2,1}+f_{2,2}$$

1.d Pour ce dernier cas, l'unique valeur propre -1 de T_{-2} admet $f_{-2,1} = {}^t(1,-1)$ comme vecteur propre associé. Cherchons à nouveau le vecteur $f_{-2,2}$ sous la forme ${}^t(1,\alpha)$ où α est un réel à déterminer. Cette fois,

$$\mathrm{T}_{-2} f_{-2,2} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ -2\alpha-1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad f_{2,1}-f_{2,2} = \begin{pmatrix}0\\ -1-\alpha\end{pmatrix}$$