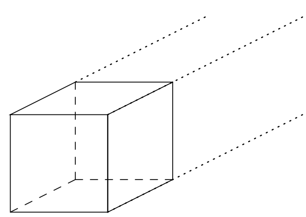
Centrale Maths 2 PSI 2007 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean Starynkévitch (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Walter Appel (Professeur en CPGE) et Paul Pichaureau (Professeur en CPGE).

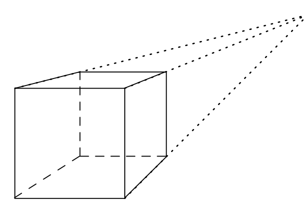
Le problème traite de la modélisation mathématique de la perspective cavalière. Une perspective est un moyen de représenter un objet de l'espace par un dessin sur un plan ; sur le plan mathématique, elle est décrite par la donnée d'une application p de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

Les deux types de perspectives les plus utilisées sont la perspective cavalière et la perspective classique. La perspective cavalière est la plus commode pour faire des calculs précis (c'est notamment celle utilisée par les ingénieurs) ; pour cette perspective, l'application p est linéaire. La perspective classique est utilisée depuis la Renaissance pour représenter notre impression visuelle.

Cube en perspective cavalière



Cube en perspective classique



L'esprit du sujet est assez classique. Pour les candidats peu à l'aise avec les problèmes de géométrie, sa principale difficulté est de savoir transposer une propriété géométrique en propriété analytique sur des coordonnées.

- La première partie traite de généralités concernant une modélisation de la perspective cavalière.
- La deuxième partie étudie l'image d'une sphère dans une telle perspective. On montre qu'il s'agit d'une ellipse.
- La troisième partie étudie un balayage de l'ellipse en question par des cercles via un recouvrement de la sphère par d'autres cercles.

Les différentes parties, de difficulté progressive, sont raisonnablement indépendantes entre elles. Inversement, à l'intérieur d'une partie, les questions sont fortement dépendantes les unes des autres et doivent être traitées dans l'ordre. Enfin, les notations introduites dans une partie sont parfois évoquées dans une partie ultérieure.

On retiendra qu'il s'agit d'un problème tout à fait classique de géométrie pour le concours Centrale-Supélec.

Indications

Partie I

I.A.1 On trouve notamment $\text{Ker}\, p = \text{Vect}\,(\overrightarrow{\nu})$.

I.B La réponse est non : élever au carré l'inégalité, et développer, en étudiant l'inégalité comme un trinôme de la variable z (les variables x et y considérées comme paramètres).

I.C.1 Raisonner par double inclusion.

I.C.4 Adapter ce qui a été fait à la question I.C.3.

I.D.2.a Raisonner par équivalence, ou bien par analyse-synthèse.

I.E.2 Raisonner par analyse-synthèse, en cherchant u par sa matrice (dont les coefficients seront pris comme inconnues) dans la base canonique.

I.E.3 Utiliser le fait que, dans un trinôme de la forme $\lambda^2 + \text{B}\lambda + \text{C}$, le terme C correspond au produit des racines du trinôme.

I.E.4 Distinguer le cas $(a, b) = (0, 0)$ des autres cas.

Partie II

II.A.1 Montrer (en raisonnant par équivalence) que, pour Y donné dans $\mathbb{R}^3$, on a $\text{Y} \in p^{-1}\big(\{\xi\}\big) \iff \text{Y} \in \text{D}_\xi$. Pour la dernière sous-question, utiliser l'équation paramétrée de D_ξ et l'équation cartésienne de S.

II.A.2 Utiliser la condition portant sur le signe du discriminant d'un trinôme pour connaître le nombre de ses racines réelles.

II.A.3.c Si vous ne savez pas répondre aux premières questions, il est temps de réviser votre cours sur les coniques. Pour vérifier que F et F′ sont bien les foyers, utiliser la caractérisation focale de l'ellipse.

II.B.1 On trouve $t_0 = -\dfrac{x\,\cos\theta + y\,\sin\theta}{2}$

II.B.3 Pour bien mener le calcul de $\Phi\big(p(\text{X})\big)$, garder le plus longtemps possible l'expression z, pour ne la remplacer qu'au dernier moment par sa valeur en fonction de (x, y), à partir de l'équation de P_0.

Partie III

III.B.1 Raisonner par équivalence, comme à la question II.A.1.

III.B.2 Utiliser l'équation paramétrée du cercle C_δ et une équation cartésienne du plan $\text{P}_0 = \{\overrightarrow{\nu}\}^\perp$.

III.B.4 On trouve $\Omega_\delta = \begin{pmatrix} \text{R}\sin\delta\cos\theta \\ \text{R}\sin\delta\sin\theta \end{pmatrix}$ et $\text{R}_\delta = \text{R}\cos\delta$. Pour montrer que l'ensemble des $p(\text{C}_\delta)$ recouvre $p(\text{S})$, utiliser l'expression en coordonnées polaires d'un point générique de S.

III.B.5 Exprimer par une inégalité portant sur la distance entre les centres d'une part, et les rayons d'autre part, une condition d'intersection (ou non) de deux cercles.

III.D Considérer une famille de cercles $(\text{C}'_\delta)_\delta$, intersections de S et d'un plan parallèle au plan Π_2 appartenant au cône isotrope de q introduit à la question I.D.1.

I. Généralités

I.A.1

- **Montrons que p est une application linéaire.** Soient $X_1 = {}^t(x_1\ y_1\ z_1)$ et $X_2 = {}^t(x_2\ y_2\ z_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et μ un scalaire. On a

$$\begin{aligned}
p(X_1 + \mu X_2) &= p\left(\begin{pmatrix} x_1 + \mu x_2 \\ y_1 + \mu y_2 \\ z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} (x_1 + \mu x_2) - \alpha(z_1 + \mu z_2) \\ (y_1 + \mu y_2) - \beta(z_1 + \mu z_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (x_1 - \alpha z_1) + \mu(x_2 - \alpha z_2) \\ (y_1 - \beta z_1) + \mu(y_2 - \beta z_2) \end{pmatrix} \\
p(X_1 + \mu X_2) &= p(X_1) + \mu\, p(X_2)
\end{aligned}$$

Donc p est bien une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. En écrivant en colonne l'image des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on trouve que la matrice de p dans la base canonique est

$$\boxed{P = \operatorname{Mat}_{(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -\beta \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})}$$

- **Déterminons le noyau de p.** Soit $X = {}^t(x\ y\ z) \in \mathbb{R}^3$. Nous avons les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
X \in \operatorname{Ker} p &\iff p(X) = 0 \\
&\iff x - \alpha z = 0 \quad \text{et} \quad y - \beta z = 0 \\
&\iff x = \alpha z \quad \text{et} \quad y = \beta z \\
&\iff X = z\, {}^t(\alpha\ \beta\ 1) \\
X \in \operatorname{Ker} p &\iff X \in \operatorname{Vect}\left({}^t(\alpha\ \beta\ 1)\right)
\end{aligned}$$

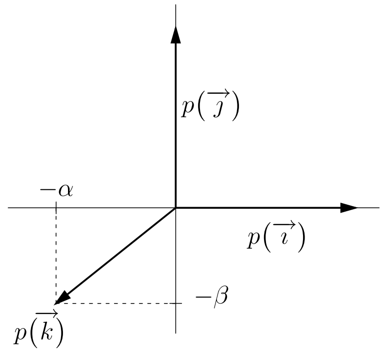
Ainsi $$\boxed{\operatorname{Ker} p = \operatorname{Vect}\left({}^t(\alpha\ \beta\ 1)\right) = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{\nu})}$$

- **Déterminons l'image de p.** Plus précisément, montrons que p est surjective.
  - Première méthode (explicite) :
    Soit $U = {}^t(x\ y) \in \mathbb{R}^2$. Posons
    $$X = {}^t(x\ y\ 0) \in \mathbb{R}^3$$
    On a alors $p(X) = U$, c'est-à-dire que U est dans l'image de p. On a donc montré que $\mathbb{R}^2 \subset \operatorname{Im} p$ et, l'inclusion réciproque étant évidente, il vient
    $$\boxed{\operatorname{Im} p = \mathbb{R}^2}$$
  - Deuxième méthode (détermination du rang de p) :
    Le théorème du rang qui, appliqué à p, donne
    $$\dim \operatorname{Ker} p + \dim \operatorname{Im} p = \dim \mathbb{R}^3$$
    montre que $\operatorname{Im} p$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 (ce qui peut également être montré en constatant que la matrice de p dans la base canonique est de rang 2), et donc est égal à $\mathbb{R}^2$.

> La première question est très classique et sans difficultés, mais il s'agit de la première question du problème que lira le correcteur. Il est donc important de rédiger bien et rapidement, pour donner une bonne impression.

I.A.2 Ci-dessous, une représentation dans le plan des vecteurs images par p de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Par le calcul, on trouve :

- $p(\overrightarrow{\imath}) = (1,0)$
- $p(\overrightarrow{\jmath}) = (0,1)$
- $p(\overrightarrow{k}) = (-\alpha,-\beta)$



I.B Calculons $\overline{p}\circ\overline{p}$. Pour $\mathrm{X} = {}^t(\,x\ y\ z)\in\mathbb{R}^3$, on a :

$$\overline{p}\circ\overline{p}(\mathrm{X}) = \overline{p}\left(\begin{pmatrix} x-\alpha z\\ y-\beta z\\ 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-\alpha z\\ y-\beta z\\ 0\end{pmatrix} = \overline{p}(\mathrm{X})$$

de sorte que
$$\overline{p}\circ\overline{p} = \overline{p}$$

L'endomorphisme p est donc un projecteur. Son noyau est Vect $(\overrightarrow{\nu})$ et son image est Vect $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$. En résumé, p est la projection sur Vect $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ parallèlement à Vect $(\overrightarrow{\nu})$. Identifions maintenant le plan Vect $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ à $\mathbb{R}^2$ via l'application linéaire

$$\Psi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,y)\end{array}\right.$$

qui réalise une bijection de Vect $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ sur $\mathbb{R}^2$. On a alors clairement
$$\Psi\circ\overline{p} = p$$

Ainsi $$\boxed{p \text{ peut s'interpréter comme une projection de } \mathbb{R}^3 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

Pour $\mathrm{X} = {}^t(x\ y\ z)\in\mathbb{R}^3$, nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \|p(\mathrm{X})\| \leqslant \|\mathrm{X}\| &\iff \|p(\mathrm{X})\|^2 \leqslant \|\mathrm{X}\|^2\\ &\iff (x-\alpha z)+(y-\beta z)^2 \leqslant x^2+y^2+z^2\\ \|p(\mathrm{X})\| \leqslant \|\mathrm{X}\| &\iff z^2(1-\alpha^2-\beta^2)-2z(\alpha x+\beta y)\leqslant 0\end{aligned}$$

Puisque α et β sont deux réels strictement positifs, on peut fixer x et y tels que $\alpha x+\beta y$ soit non nul. Sous cette condition, le trinôme en z

$$z^2(1-\alpha^2-\beta^2)-2z(\alpha x+\beta y) = z\big(z(1-\alpha^2-\beta^2)-2(\alpha x+\beta y)\big)$$

a deux racines réelles distinctes, et n'est donc pas de signe constant. Finalement,

$$\boxed{\text{Il existe au moins un } \mathrm{X}\in\mathbb{R}^3 \text{ tel que } \|p(\mathrm{X})\| > \|\mathrm{X}\|\,.}$$