CCP Maths 1 MP 2005 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Dujardin (ENS Cachan) ; il a été relu par Hicham Qasmi (ENS Lyon) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Cette épreuve d'analyse est composée de deux exercices et un problème, qui sont indépendants les uns des autres.

Le premier exercice est consacré au calcul de deux intégrales de fonctions continues sur des parties élémentaires du plan et ne présente aucune difficulté particulière.

Le second exercice est consacré à la résolution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle scalaire linéaire du premier ordre non résolue et sans second membre. On se ramène à une équation résolue en travaillant sur $]-\infty\,;0\,[$ et $]\,0\,;+\infty\,[$, puis on étudie le raccordement des solutions en 0. On calcule notamment la dimension de l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Le thème principal du problème est le théorème d'Abel pour les séries entières. Ce problème est composé de quatre parties dépendantes les unes des autres.

- La première partie porte sur quelques généralités qui font utiliser les définitions et les résultats de base du cours sur les séries numériques et les séries entières. On est amené à chercher quelques exemples de séries entières ayant des propriétés données parmi les fonctions développables en série entière classiques.
- La deuxième partie aborde la démonstration (largement guidée) du théorème d'Abel annoncé et propose l'étude d'un exemple et de deux applications de ce théorème, dont une identité sur le produit de Cauchy convergent de deux séries convergentes.
- La troisième partie démontre que la réciproque du théorème d'Abel est fausse. Sous des hypothèses plus restrictives, un théorème de Littlewood (admis) que l'on sera ensuite amené à utiliser constitue toutefois une forme de réciproque.
- Enfin, la quatrième partie introduit les séries harmoniques transformées. On s'intéresse à un critère de convergence adapté avant de donner un moyen théorique de calculer leurs sommes. Un exemple explicite de calcul de somme fait d'ailleurs l'objet de la toute dernière question du problème.

Ce sujet d'une taille raisonnable est l'occasion de vérifier que certains résultats de base du cours d'analyse sont acquis.

Indications

Exercices

a Remarquer que T est un domaine triangulaire du plan.

b Décomposer C pour appliquer le théorème du changement de variables et utiliser la question précédente.

1 Remarquer que (E_n) est une équation différentielle linéaire scalaire homogène du premier ordre résolue en y' sur I comme sur J.

2 Raisonner graphiquement en 0, et utiliser la question précédente.

3 Utiliser la question 1 et examiner les conditions de raccordement en 0.

Problème

1 Chercher parmi les fonctions classiques dont le développement en série entière en 0 a un rayon unité.

2 Majorer $\left|f(x) - \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right|$ pour x voisin de 1.

3 On peut écrire $\dfrac{1}{n\,(n-1)} = -\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n-1}$ et utiliser la question précédente.

4.b Utiliser le résultat de la question 4.a.

4.c Constater que r_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

4.d Majorer $\left|f(x) - \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right|$ pour x voisin de 1, à l'aide d'un découpage astucieux de la somme permettant d'utiliser le résultat de la question 4.c.

5 Montrer que, si $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, alors la série $\sum a_n$ est divergente. On pourra utiliser le théorème d'Abel.

6 Observer que $\lim\limits_{x\to 1^-} \mathrm{Arctan}\,(x) = \mathrm{Arctan}\,(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

7.a Montrer que le produit de Cauchy est grossièrement divergent.

7.b Utiliser un résultat du cours sur les séries entières pour obtenir une identité entre les sommes des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n\,x^n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n\,x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n\,x^n$ sur l'intervalle $]\,-1\,;1\,[$. En déduire l'égalité demandée par passage à la limite à l'aide du théorème d'Abel démontré à la question 4.

8 On peut réutiliser un exemple donné à la question 1.

10 Une définition possible du rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\varepsilon_n}{n}\,x^n$ est

$$\mathrm{Sup}\,\left\{\rho \geqslant 0 \quad \middle| \quad \left(\left|\frac{\varepsilon_n}{n}\right|\rho^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée}\right\}$$

11 Utiliser le théorème d'Abel et le théorème de Littlewood.

12 Réordonner les sommes partielles d'indice $\mathrm{N}p$ (où $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$) de la série entière définissant g.

13 Utiliser le résultat de la question 12 pour calculer les fonctions g et f associées à chacune des deux séries. Utiliser ensuite le résultat de la question 11 pour en déduire le comportement des séries en question.

14 Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\varepsilon_n}{n}$ est convergente si et seulement si $\sum\limits_{i=1}^{p} \varepsilon_i = 0$ en utilisant les résultats des questions 11 et 12.

15 Déterminer la fraction rationnelle g à l'aide de la question 12, puis la fonction f correspondante pour enfin conclure avec le résultat démontré à la question 4.

Premier exercice

a

> La réponse que l'on apporte à cette question de calcul d'intégrale double peut sembler excessivement technique, alors que le calcul par lui-même est assez simple. En fait, on tient à suivre à la lettre la présentation de l'objet mathématique « intégrale double » proposée par le programme officiel de classe préparatoire MP. Ce dernier impose en particulier de travailler avec des fonctions numériques continues sur des parties élémentaires (ou simples) du plan. On prend donc le temps, pour répondre à la première question du premier exercice de l'épreuve, de vérifier soigneusement toutes les hypothèses qui permettent d'appliquer les résultats (définitions et propriétés) du cours.

Observons deux choses :

- T est une partie élémentaire du plan $\mathbb{R}^2$. En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathrm{T} &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[\,-1\,;1\,] \text{ et } \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\} \\ \mathrm{T} &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[\,-1\,;1\,] \text{ et } \varphi_1(y)\leqslant x\leqslant\varphi_2(y)\} \end{aligned}$$

  où l'on a posé :

$$\varphi_1\colon \begin{cases} [\,-1\,;1\,] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto -x \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \varphi_2\colon \begin{cases} [\,-1\,;1\,] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto 1 \end{cases}$$

  de sorte que φ_1 et φ_2 sont continues sur $[\,-1\,;1\,]$ et l'on a

$$\forall x\in\,]\,-1\,;1\,[\qquad \varphi_1(x)=-x<1=\varphi_2(x)$$

- Lorsque T est muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$, l'application

$$f\colon \begin{cases} \mathrm{T} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x+y \end{cases}$$

  est continue.

En notant $\widehat{f}$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, égale à f sur T et à 0 sur $\mathbb{R}^2\smallsetminus\mathrm{T}$, on est assuré que

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

a un sens et est par définition $\displaystyle\iint_{\mathrm{T}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Calculons donc, pour $y\in\mathbb{R}$ fixé la quantité $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(x,y)\,\mathrm{d}x$:

- si $y\in[\,-1\,;1\,]$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(x,y)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}}(x+y)\,\mathbb{1}_{[\,-y\,;1\,]}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-y}^{1}(x+y)\,\mathrm{d}x \\ &= y(1+y)+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-y}^{1} = \frac{1}{2}(y+1)^2 \end{aligned}$$

- si $y \in \mathbb{R} \smallsetminus [\,-1\,;1\,]$, alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x,y)\,\mathrm{d}x = 0$.

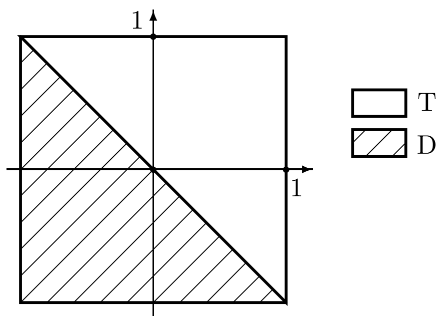
> Lorsque $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, on a noté $\mathbb{1}_{\mathrm{I}}$ la fonction caractéristique de I dans $\mathbb{R}$ définie par
> $$\mathbb{1}_{\mathrm{I}} \colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathrm{I} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathrm{I} \end{cases} \end{cases}$$
> On constate qu'elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Finalement, calculons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (1+y)^2 \mathbb{1}_{[\,-1\,;1\,]}(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (1+y)^2\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \left[(1+y)^3 \right]_{-1}^{1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

D'où
$$\boxed{\iint_{\mathrm{T}} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{4}{3}}$$

b Notons D l'adhérence de $\mathrm{C} \smallsetminus \mathrm{T}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ (muni de sa topologie usuelle). On décompose ainsi C comme indiqué sur la figure ci-dessous :



La fonction $g \colon \begin{cases} \mathrm{C} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto |x+y| \end{cases}$ est continue sur C.

> C est muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$.

La partie C est (élémentaire et) simple, car elle est réunion des parties élémentaires d'intérieurs disjoints T et D. En conséquence,

$$\iint_{\mathrm{C}} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathrm{T}} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\mathrm{D}} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

En outre, si l'on note φ le C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\varphi \colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (-x,-y) \end{cases}$$