X Physique 1 PC 2004 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean-David Picon (École Polytechnique) ; il a été relu par Aurélien Fraisse (ENS Cachan) et Jean-Julien Fleck (ENS Ulm).

Ce sujet se compose de trois parties liées et de difficultés inégales ; certains résultats sont fort utiles pour la compréhension de la suite.

- La première partie, particulièrement variée, permet d'interroger le candidat sur de nombreux points du cours : analyse dimensionnelle, équipartition de l'énergie, théorème de Gauss, accélération d'entraînement, loi de l'hydrostatique.
- Dans la deuxième partie, il s'agit tout d'abord de retrouver, dans le cadre d'une étude du Soleil, des résultats proches du cours comme l'équation de propagation des ondes acoustiques. Suit une partie calculatoire nécessitant un peu de rigueur. Enfin, on s'intéresse rapidement à la validité du modèle et à sa vérification expérimentale.
- La troisième partie s'éloigne plus nettement du cours. On étend tout d'abord les lois de Descartes au cas d'un milieu à symétrie sphérique. Puis on applique ces lois aux ondes acoustiques dans un milieu d'indice variable. Ce modèle permet de prédire l'existence de modes d'ondes stationnaires, dont on détermine quelques caractéristiques. Pour terminer, on teste le modèle en le confrontant à quelques données expérimentales.

En résumé, on applique dans ce problème les lois de l'acoustique dans une configuration à symétrie sphérique. Cela permet de retrouver les résultats principaux d'une discipline assez jeune, l'héliosismologie, qui a pris son essor dans les années 1990. Particulièrement adaptée aux candidats férus d'astronomie moderne, elle permet de tester ses aptitudes à appliquer les relations du cours dans un cadre plus général.

Indications

I. La structure interne du Soleil : un modèle simple

I.1.a De quels paramètres peut et doit dépendre la pression P_C au cœur du Soleil ? Combien existe-t-il de combinaisons homogènes à une pression ?

I.1.b Utiliser successivement l'équipartition de l'énergie, le théorème du viriel et la loi des gaz parfaits.

I.2.a Appliquer le théorème de Gauss.

I.2.b Puisque le Soleil tourne (par rapport au référentiel de référence supposé galiléen), le référentiel qui est lié au Soleil n'est pas galiléen.

I.3.a Si $\gamma = 1$, qu'en est-il de la température T ?

I.3.c Penser à la loi de la statique des fluides.

I.3.e Calculer la vitesse de l'onde à la surface du soleil à l'aide de sa définition et de la loi des gaz parfaits.

II. Études des oscillations dans les couches périphériques

II.1.a ρ_1, v_1 et p_1 sont des perturbations du premier ordre. Négliger dans l'équation du mouvement tous les termes d'ordre supérieur.

II.1.b Quelle loi de conservation doivent vérifier les grandeurs étudiées ?

II.1.c Développer les équations au premier ordre.

II.1.d Utiliser les trois questions précédentes.

II.2.a Se souvenir que
$$\frac{\mathrm{d}f(\mathrm{X}(z))}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dX}}\,\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{d}z}$$
et prendre le temps de faire le calcul soigneusement.

II.2.b Que vaut la masse volumique totale ρ à la surface du Soleil ? Une telle valeur est-elle possible avec une onde progressive seule ?

II.2.c Utiliser la question II.2.a en écrivant ρ_1 comme la somme d'une onde progressive et de son onde réfléchie.

II.3.a L'évolution n'étant plus adiabatique, il faut trouver une nouvelle relation entre ρ et P dans le cas isotherme.

III. Études des oscillations dans les couches internes

III.1.a Considérer la variation $\mathrm{d}(n\,\sin i)$ à travers une lame d'épaisseur $\mathrm{d}z$.

III.1.b Si le rayon n'est pas dans le plan diamétral, combien y a-t-il de solutions pour des conditions initiales données ?

III.1.c Faire un dessin d'un rayon traversant deux interfaces sphériques concentriques séparant des milieux de même indice.

III.1.d Calculer la variation totale $\mathrm{d}i = \mathrm{d}i_1 + \mathrm{d}i_2$.

III.1.e D'après la relation établie à la question précédente, que se passe-t-il quand r diminue ?

III.3.a Que représente $\dfrac{\mathrm{d}r}{c(r)}$?

I. La structure interne du Soleil : un modèle simple

1. Les ordres de grandeur

I.1.a La pression $\mathrm{P_C}$ au cœur du Soleil est due à l'interaction gravitationnelle qui tend à rapprocher tous les éléments de l'étoile les uns des autres. Par conséquent, son expression doit faire intervenir les caractéristiques du Soleil comme sa masse M et son rayon R, ainsi que la constante de gravitation G (et rien de plus).

Cherchons alors une combinaison de ces grandeurs qui soit homogène à une pression. En s'aidant par exemple de l'expression de la force d'interaction gravitationnelle, on trouve

$$\boxed{\mathrm{P_C} = \frac{\mathrm{G\,M^2}}{\mathrm{R^4}}}$$

Cette expression est homogène à une force divisée par une surface et c'est en fait l'unique combinaison possible. En effet,

$$[\mathrm{G}] = \mathrm{M^{-1}\,L^3\,T^{-2}} \qquad \text{et} \qquad [\mathrm{P_C}] = \mathrm{M\,L^{-1}\,T^{-2}}$$

Par conséquent, pour que $\mathrm{P_C}$ soit homogène en temps, G doit apparaître à la puissance 1 dans l'expression de $\mathrm{P_C}$. Dès lors, il est facile de voir que le reste de cette expression est nécessairement homogène en masse et en longueur.

> Un calcul plus élaboré, en faisant par exemple l'approximation d'une masse volumique uniforme sur l'ensemble de l'étoile, conduit à la valeur
>
> $$\mathrm{P_C} = \frac{3\,\mathrm{G\,M^2}}{8\,\pi\,\mathrm{R^4}}$$
>
> On constate la puissance de l'analyse dimensionnelle...

Application numérique : $\boxed{\mathrm{P_C} = 1,1.10^{15}\ \mathrm{Pa}}$

I.1.b En se rappelant que l'énergie d'interaction $\mathrm{E_P}$ entre deux masses m et m' distantes de r est égale à

$$\mathrm{E_P} = -\frac{\mathrm{G}\,m\,m'}{r}$$

la même démarche qu'à la question précédente conduit à

$$\boxed{\Omega = -\frac{\mathrm{G\,M^2}}{\mathrm{R}}}$$

On démontre de la même manière que c'est l'unique solution envisageable avec les grandeurs impliquées.

De plus, on assimile le mélange d'hélium et d'hydrogène atomique à un gaz parfait monoatomique. Chaque molécule a donc trois degrés de liberté de translation et aucun de rotation. Or, d'après le théorème d'équipartition de l'énergie, à chaque degré de liberté correspond, à l'équilibre thermodynamique, une énergie d'agitation thermique $(\mathrm{R_{GP}\,T})/2$ par mole de gaz. Comme le nombre de moles de gaz composant le Soleil est égal à M/μ, l'énergie cinétique $\mathrm{E_C}$ du Soleil vaut

$$\boxed{\mathrm{E_c} = \frac{3\,\mathrm{M\,R_{GP}\,T_C}}{2\,\mu}}$$

En outre, d'après le théorème du viriel donné dans l'énoncé,

$$\Omega + 2\mathrm{E_c} = 0$$

On peut en déduire la température uniforme T du Soleil égale, par ailleurs, à $\mathrm{T_C}$.

$$\boxed{\mathrm{T_C} = \frac{\mu\,\mathrm{G\,M}}{3\,\mathrm{R_{GP}\,R}}}$$

Finalement, on en déduit la masse volumique ρ_C au centre du Soleil. D'après la loi des gaz parfaits et avec les notations de l'énoncé,

$$\mathrm{P} = \frac{\rho\,\mathrm{R_{GP}\,T}}{\mu}$$

d'où
$$\boxed{\rho_\mathrm{C} = \frac{\mathrm{P_C}\,\mu}{\mathrm{R_{GP}\,T_C}} = \frac{3\,\mathrm{M}}{\mathrm{R}^3}}$$

Application numérique :

$$\boxed{\mathrm{T_C} = 9,7.10^6\ \mathrm{K} \qquad \text{et} \qquad \rho_\mathrm{C} = 1,7.10^4\ \mathrm{kg.m^{-3}}}$$

La température est du bon ordre de grandeur, contrairement à la masse volumique. En effet, cette dernière équivaut à 3 fois la densité moyenne de la Terre, ce qui est bien loin de la réalité.

2. Le champ gravitationnel

I.2.a D'après le théorème de Gauss, dans un astre à symétrie sphérique, le champ de gravitation $g(r)$ en r n'est dû qu'à la masse $m(r)$ à l'intérieur de la boule de rayon r. En effet, les contributions extérieures se compensent exactement. De plus, tout se passe comme si toute la masse était concentrée en $r = 0$. Par suite,

$$\boxed{g(r) = \frac{\mathrm{G}\,m(r)}{r^2}}$$

> Pour retrouver facilement l'expression de g, il suffit de se souvenir que la force d'interaction gravitationnelle s'identifie, à la surface du Soleil, au poids si l'on néglige l'accélération d'entraînement. Par conséquent, si m est la masse d'un objet à la surface de l'étoile,
>
> $$m\,g = \frac{\mathrm{G\,M}\,m}{\mathrm{R}^2}$$

I.2.b Comme le Soleil tourne avec une vitesse angulaire que l'on note $\overrightarrow{\Gamma}$, le référentiel lié au Soleil n'est pas exactement galiléen. En conséquence, un système immobile dans le référentiel lié au Soleil subit la force d'inertie d'entraînement, l'accélération de Coriolis étant nulle. Comme la vitesse de rotation est constante, l'accélération d'entraînement $\overrightarrow{a}(\overrightarrow{r})$ se réduit à un seul terme,

$$\overrightarrow{a}(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{\Gamma} \wedge \left(\overrightarrow{\Gamma} \wedge \overrightarrow{r}\right)$$

En un point de l'équateur, l'accélération est maximale et vaut en module

$$a(r) = \Gamma^2\,r$$