Mines Maths MPSI 2001 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Yacine Dolivet (ENS Ulm) ; il a été relu par Emmanuel Delsinne (ENS Cachan) et Laurent Thomann (ENS Cachan).

Ce sujet est constitué de deux problèmes indépendants.

Dans le premier, on se propose de déterminer les suites récurrentes linéaires satisfaisant l'équation $u_{n+1} = au_n + \mathrm{P}(n)$, où a est un réel quelconque et P un polynôme quelconque lui aussi. C'est un exemple concret d'application des techniques usuelles d'algèbre linéaire et, en cela, il constitue un exercice intéressant pour qui cherche à se familiariser avec cette partie du cours.

Dans le second problème, consacré à l'analyse, on étudie de façon qualitative la solution de l'équation d'inconnue y

$$(\mathrm{E}_x) : \quad \int_x^y \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

lorsque φ est une fonction dont on connaît quelques propriétés. N'étant pas fondé sur le calcul, il demande d'être attentif à l'enchaînement des questions afin de bien effectuer la synthèse requise lors de l'étude finale d'un exemple.

Dans l'ensemble, ce problème est assez difficile vu le nombre de questions ouvertes qu'il pose. Il exige donc qu'on ne perde jamais le fil du raisonnement global et constitue également un bon exercice d'entraînement en raison de l'esprit de synthèse qu'il requiert.

Indications

Premier problème

I.2.a Que dire d'une suite pour laquelle $u_{n+1} - u_n$ est constant ?

I.4 Écrire $\lambda x + \mu y = 0$ pour $n \in \{0, 1\}$ et résoudre le système afin de conclure sur la liberté.

I.5.b Effectuer une récurrence sur n et remarquer que $b_{\lambda x+\mu y} = \lambda b_x + \mu b_y$, c'est-à-dire que $b : x \mapsto b_x$ est une application linéaire.

I.5.c Montrer que (x, y) est une base de E_a^0 .

II.1 Considérer deux polynômes satisfaisant la relation demandée et montrer que leur différence admet une infinité de racines.

II.4 Penser aux suites géométriques.

II.5.b Que dire d'une famille de polynômes à degrés échelonnés ?

II.6.a Considérer les suites $(n^k)_{n\in\mathbb{N}}$.

II.6.b Montrer que θ est surjective.

II.7 Utiliser le théorème du rang.

II.8 Montrer d'abord que $(x^{(0)}, \ldots, x^{(p)})$ est libre, puis qu'en rajoutant y on a encore une famille libre. Montrer enfin qu'on peut conclure sans prouver explicitement que la famille est génératrice.

II.9 Utiliser les résultats précédents pour obtenir une base simple sur laquelle décomposer u.

III.1 Que vaut le noyau de θ à présent ? Quel est le nouveau degré des Q_k ? Que vaut Q_0 ? Changer légèrement la base de polynômes utilisée dans la deuxième partie. La suite également est complètement similaire au travail précédent. Conclure que $(x, x^{(1)}, \ldots, x^{(p+1)})$ est la base recherchée.

Second problème

I.3 Trouver le signe de $f(x) - x$ au voisinage de $+\infty$.

I.4 Le développement limité jusqu'à l'ordre 1 permet de **lire** quelle est la tangente à $\mathcal{C}$ en 0. Développer un cran plus loin permet de connaître leurs positions relatives.

II.1 Une primitive de φ est $\dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{Arctan}$.

II.3.a Utiliser la relation de Chasles.

II.3.c Utiliser le résultat de la question précédente afin de minorer Φ_x et de montrer qu'elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

II.3.d Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

III.1 Introduire 0 via la relation de Chasles. Montrer que Φ_0 est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur son image.

III.3.a Si φ ne s'annule pas, montrer que Φ_0 est en fait même un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

III.3.b Passer par le taux d'accroissement pour montrer la non dérivabilité et utiliser le théorème des accroissements finis.

III.4.b Minorer $\Phi_x\,(x+\varepsilon)$ pour x assez grand afin de localiser $f(x)$.

III.5 Comme précédemment, minorer $\Phi_x\left(x+\dfrac{1}{l-\varepsilon}\right)$ et majorer $\Phi_x\left(x+\dfrac{1}{l+\varepsilon}\right)$ pour x assez grand et ε suffisamment petit.

III.6.a Faire le changement de variable $u=-t$.

III.6.b Montrer que $y=-x$ est un axe de symétrie.

IV.2 Utiliser la symétrie une première fois pour obtenir une asymptote en $-\infty$ puis une deuxième fois pour déterminer quels sont les points à tangente horizontale lorsqu'on connaît déjà d'autres points particuliers de f.

Premier problème

Première partie

I.1 Soit $u \in \mathrm{E}_a^{(0)}$. On a $b = u_1 - au_0$; donc, pour une suite donnée, il n'existe qu'un seul b.

$$\boxed{b \text{ est unique.}}$$

I.2.a Les éléments de $\mathrm{E}_1^{(0)}$ vérifient par définition $u_{n+1} = u_n + b_u$ pour tout n. Ce sont donc les suites arithmétiques de raison b_u et on connaît leur expression pour tout n.

$$\boxed{\mathrm{E}_1^{(0)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = nb + u_0\}}$$

I.2.b Les éléments de $\mathrm{E}_0^{(0)}$ vérifient par définition $u_{n+1} = b_u$ pour tout n. Ce sont donc les suites constantes à partir du rang 1.

> Attention, il n'y a pas que les suites constantes. La suite $(1, 0, 0\ldots)$ est aussi dans $\mathrm{E}_0^{(0)}$ par exemple.

I.3 $\mathrm{E}_a^{(0)} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est stable par addition et par multiplication par tout réel, c'est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Ainsi $$\boxed{\mathrm{E}_a^{(0)} \text{ est un espace vectoriel.}}$$

> Il est quasiment toujours plus facile de vérifier qu'un ensemble est un espace vectoriel en montrant qu'il s'agit, en fait, d'un sous-espace vectoriel d'un autre espace vectoriel connu.

I.4 La suite constante égale à 1 est dans $\mathrm{E}_a^{(0)}$ puisque $b = 1 - a$ convient. Il en va de même pour (y_n) car, pour tout n, $y_{n+1} = ay_n$ et on s'aperçoit que $b = 0$ convient.

Montrons maintenant que (x, y) est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\lambda x + \mu y = 0$. En particularisant l'égalité précédente pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + a\mu = 0 \end{array}\right.$$

qui est de Cramer puisque son déterminant vaut $a - 1 \neq 0$ par hypothèse. Il admet donc comme seule solution $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. La famille (x, y) est donc libre.

En conclusion $$\boxed{(x, y) \text{ est libre ; } b_x = 1 - a \text{ et } b_y = 0.}$$

I.5.a D'après les définitions de x et y, on cherche donc à résoudre le système suivant