CCP Maths 1 PSI 2001 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sébastien Desreux (ENS Ulm) et Nicolas Andraud (Mines de Paris) ; il a été relu par Vincent Perrier (ENS Lyon) et David Lecomte (ENS Cachan).

Cette épreuve, composée de deux problèmes indépendants, demande peu de connaissances techniques ; de surcroît, le travail est très bien guidé par des questions précises et progressives.

En revanche, on a souvent besoin de faire appel aux résultats de questions déjà traitées et il est essentiel de prendre un peu de recul vis-à-vis de l'énoncé pour comprendre où il nous mène. En outre, plusieurs questions exigent beaucoup de rigueur.

C'est donc un excellent entraînement aux épreuves écrites.

- Le premier problème propose l'étude de la série des restes d'une série convergente. Après une mise en jambe facile, on montre à la question II.1 une identité que l'on utilise ensuite pour l'étude : d'une suite, des restes des séries à termes positifs, des restes de la fonction ζ et enfin des restes d'une série entière.
- Le second problème propose de calculer le déterminant de la matrice de terme général

$$w_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2p}}\mathrm{C}_{2p}^{p} & \text{si } i+j \text{ est pair } (i+j=2p) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  À cette fin, on exprime $w_{i,j}$ en fonction d'une intégrale de la forme $\displaystyle\int_0^\pi \cos^k t \,\mathrm{d}t$ (qui doit faire penser aux intégrales de Wallis), ce qui introduit une étude de nature euclidienne au moyen du produit scalaire (usuel)

$$\langle f \mid g \rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Indications

Premier problème

I.1.1 La série est géométrique.

I.2.1 Utiliser le théorème des séries alternées.

I.2.2.2 Utiliser le théorème de convergence dominée.

I.2.2.5 Utiliser à nouveau le théorème de convergence dominée.

II.1 Remarquer que $\mathrm{R}_k = \mathrm{R}_n + \sum\limits_{p=k+1}^{n} u_p$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$ ou raisonner par récurrence.

II.2 Poser $u_k = (-1)^{k+1}/k$ et utiliser la question précédente sous la forme $-\sum\limits_{k=1}^{n} k\,u_k = \ldots$

II.3.1 Remarquer (à l'aide de la question II.1) que $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,u_k$ est compris entre 0 et $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{R}_k$.

II.3.2 Encadrer $(n+1)\mathrm{R}_n$ en remarquant que

$$\forall k \geqslant n+1 \qquad (n+1)\,u_k \leqslant k\,u_k$$

II.4 Utiliser la question II.3.3.

II.5.1 Une série entière est dérivable terme à terme sur son intervalle (ouvert) de convergence.

II.5.3.1 Remarquer que (a_k) est bornée, ou trouver un équivalent.

II.5.3.2 Passer en complexes.

Deuxième problème

I.3.2 Intégrer J_{m+2} par parties $(m+2 = 1 + (m+1))$.

I.3.3 Construire une formule empirique et la compléter en ajoutant les termes pairs.

II.1 Linéariser le produit de cosinus.

II.2 La famille est orthonormale, donc...

II.3 Utiliser la formule d'Euler puis la formule du binôme.

II.4 Montrer que e_m peut s'écrire comme combinaison des v_k, $0 \leqslant k \leqslant m$.

II.5 Utiliser le théorème de projection orthogonale et le fait que la famille (e_i) est une base orthonormale de $\mathrm{H}_m(e)$.

II.6.1 Remarquer que la matrice Q_n est triangulaire.

II.6.2 Reconnaître une matrice de Gram.

Premier problème

> L'énoncé a choisi d'utiliser une notation qui peut prêter à confusion :
>
> une série est notée $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x)$
>
> tandis que sa somme est notée $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$
>
> Afin de faciliter votre lecture, nous avons choisi de conserver la notation de l'énoncé. Toutefois, le jour du concours, vous pourriez sans problème utiliser la notation (standard) $\sum u_n(x)$ pour une série dans votre copie.

Partie I

I.1.1.1 La série de terme général $(-x)^k$ est géométrique de raison $-x$; elle converge si et seulement si $|-x| \in [\,0\,;1\,[$, et dans ce cas sa somme est $1/(1-(-x))$.

$$\boxed{\begin{array}{ll} & \sum\limits_{k\geqslant 0}(-1)^k x^k \text{ converge sur } \mathrm{I} = \,]-1\,;1\,[\\ \text{et} \quad \forall x\in\mathrm{I} & \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = \dfrac{1}{1+x} \end{array}}$$

I.1.1.2 La convergence sur I de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}(-x)^k$ assure l'existence du reste $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(-x)^k$ pour tout $x\in\mathrm{I}$ et tout $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{\infty}(-x)^k \\ &= (-x)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{R}_n(x) = \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}}$$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\mathrm{R}_n(x)$ est donc géométrique, de premier terme $-x/(1+x)$ et de raison $-x$; elle converge si et seulement si $|-x|\in[\,0\,;1\,[$, c'est-à-dire $x\in\mathrm{I}$, et sa somme est

$$\boxed{\mathrm{S}(x) = \frac{-x}{(1+x)^2}}$$

I.2.1 La suite $(1/k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle, donc la série alternée $\sum\limits_{k\geqslant 1}(-1)^{k+1}/k$ est convergente, ce qui justifie l'existence de ses restes pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

I.2.2.1 Commençons par vérifier l'identité proposée (l'existence des restes a été justifiée à la question I.1.2) :

$$\sum_{k=n}^{m}(-x)^k = \sum_{k=n}^{\infty}(-x)^k - \sum_{k=m+1}^{\infty}(-x)^k = \mathrm{R}_{n-1}(x) - \mathrm{R}_m(x)$$

Chacun des termes du membre de droite peut être majoré par 1 :

$$\forall x \in [\,0\,;1\,[\;\; \forall p \in \mathbb{N} \qquad |\mathrm{R}_p(x)| = \frac{x^{p+1}}{1+x} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1$$

L'inégalité triangulaire fournit donc le résultat :

$$\forall m, n \geqslant m\ \forall x \in \mathrm{I}_0 \qquad \left|\sum_{k=n}^{m}(-x)^k\right| \leqslant |\mathrm{R}_{n-1}(x)| + |\mathrm{R}_m(x)| \leqslant 2$$

> On peut en fait obtenir une majoration plus fine sans effort particulier :
>
> $$\forall x \in [\,0\,;1\,[\qquad \left|\sum_{k=n}^{m}(-x)^k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{m}|x^k| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}x^k = \frac{1}{1+x} \leqslant 1$$

I.2.2.2

> La question précédente semble un peu parachutée et, de surcroît, son résultat n'est guère passionnant : on peut donc se douter qu'il ne s'agit que d'une étape dans un enchaînement plus vaste, en l'occurrence l'hypothèse essentielle du théorème de convergence dominée.

Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(f_m)_{m\geqslant n}$ (n est fixé) définies par :

$$f_m : \begin{cases} \mathrm{I}_0 \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=n}^{m}(-1)^k x^k \end{cases}$$

- Chaque fonction f_m est continue (comme somme finie de fonctions qui le sont) sur I_0 ;
- la suite (f_m) converge simplement vers R_{n-1} sur I_0 ;
- R_{n-1} est continue sur I_0 ;
- chaque f_m est majorée sur I_0 par la fonction constante à la valeur 2 d'après la question précédente ;
- la fonction constante à la valeur 2 est continue et intégrable sur I_0.

D'après le théorème de convergence dominée, la fonction R_{n-1} est intégrable sur I_0 (ce que l'on pouvait prouver de manière plus élémentaire avec la question I.1.2) et (surtout)

$$\int_{\mathrm{I}_0} \lim_{m\to+\infty} f_m(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{m\to+\infty}\int_{\mathrm{I}_0} f_m(x)\,\mathrm{d}x$$

ce qui se réécrit